

METODE – Sumar

Notatii:

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ - Sistemul neliniar

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$ = Jacobianul funcției $\mathbf{f}(\mathbf{x})$: $F_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

$\mathbf{x}^{(0)}$ = aproximația inițială a soluției $\mathbf{\alpha}$ (în general, apropiată de $\mathbf{\alpha}$).

METODA – SCHEMA DE ITERARE

1. Punct fix

Pentru $n \geq 0$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) \cdot \delta \mathbf{x}^{(n+1)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)})$$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \delta \mathbf{x}^{(n+1)}$$

$n \geq 0$;

Jacobianul $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})$ se actualizează după un număr de pași (uzual, 3-4 pași).

În program:

- Jacobianul se actualizează după 3 pași;
- Jacobianul este calculat numeric (v. pct. 3) cu $h = 1E-3$;

2. Newton

Pentru $n \geq 0$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(n)}) \cdot \delta \mathbf{x}^{(n+1)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n)})$$

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} + \delta \mathbf{x}^{(n+1)}$$

3. Newton-numeric (sau: Newton-discret)

Schema de iterare este cea de la metoda Newton (pct. 2).

Jacobianul este calculat numeric (derivatele parțiale se calculează prin diferențe finite):

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{h}$$

În program: $h = 1E-3$.

4. Broyden-1 (Broyden "Good" Update)

\mathbf{B}_k este aproximația jacobianului la pasul k .

Notăm, în ceea ce urmează, \mathbf{x}_k în loc de $\mathbf{x}^{(k)}$ (și \mathbf{s}_k în loc de $\delta\mathbf{x}^{(k+1)}$).

Inițializare: $\mathbf{B}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$, iar $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ se calculează numeric (pct. 3)

- Schema de iterare:

Pentru $k \geq 0$:

$$\mathbf{B}_k \mathbf{s}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k;$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k);$$

Actualizează \mathbf{B}_k ;

- Formula de actualizare a lui \mathbf{B}_k :

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\mathbf{y}_k - \mathbf{B}_k \mathbf{s}_k) \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{s}_k}$$

5. Broyden-2 (Broyden "Bad" Update)

Aceeași definiție și inițializare pentru \mathbf{B}_k .

Notăție: $\mathbf{H}_k = \mathbf{B}_k^{-1}$ (inversa lui \mathbf{B}_k);

Inițializare: $\mathbf{H}_0 = \mathbf{B}_0^{-1}$.

- Schema de iterare:

Pentru $k \geq 0$:

$$\mathbf{s}_k = -\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k;$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k);$$

Actualizează \mathbf{H}_k ;

- Formula de actualizare a lui \mathbf{H}_k :

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{H}_k + \frac{(\mathbf{s}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k) \mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k}{\mathbf{s}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{y}_k}$$

■

Testul de oprire a iterației

$$\|\delta \mathbf{x}^{(n+1)}\| \leq eps \quad \text{sau} \quad \|\mathbf{s}_k\| \leq eps;$$

Număr de iterații (n sau k) $\leq nlim$

■