APLICAŢIA Nr. 1 / II

Se definesc următoarele numere:

ULP = 2^{-52}; *EM* = 2^{-53}; *EPS* = `EPSILON(real*8)`,

unde `EPSILON(x)` este funcţia intrinsecă.

Scrieţi un program care calculează în *dublă precizie*, şi afişează, numerele:

1) *ULP*; *EM*; *EPS*

2) $u = 1.0 + ULP$; $u1 = 1.0 + EM$; $u2 = 1.0 + EPS$

Testaţi (în program) dacă *u*, *u*1, şi *u*2 sunt mai mari sau egale cu 1.D0 .

Explicaţi rezultatele.

APLICAŢIA Nr. 2 / II

Calculaţi valorile următoarelor funcţii, pentru valorile $x = 10^i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$ - în simplă precizie;

$f2(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$ - în dublă precizie;

$g(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}}$ - în simplă precizie,

- Tabelaţi valorile calculate astfel: $f2(x)$ cu 8 cifre semnificative corecte, și $f(x), g(x)$ cu numărul maxim de cifre semnificative asigurate de precizia simplă. Explicaţi rezultatele.
- Stabiliţi numarul de cifre semnificative corecte ale valorii $f(x)$ pentru $x = 10^5$, considerând valorile $f2(x)$ ca valori adevărate.

APLICAŢIA Nr. 3 / II

Ecuaţia $f(x)=e^x-3.7(x^2)^{1/3}=0$ are trei rădăcini.

- Găsiţi intervalele de lungime 1, care conţin rădăcinile.
- Găsiţi rădăcinile cu metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS=10^{-6}$.
- Regăsiţi rădăcinile cu metoda SECANTEI, cu aceeaşi toleranţă, şi comparaţi numărul de iteraţii.

APLICAŢIA Nr. 4 / II

Ecuaţia $f(x)=e^x-5x^2=0$ are trei rădăcini.

Găsiţi rădăcinile, cu toleranţa $EPS=10^{-6}$, prin:

- metoda BISECŢIEI
- metoda NEWTON

APLICAŢIA Nr. 5 / II

Se dă ecuaţia $f(x) = 0$, unde:

$$f(x) = 0.99\cos(x) - x + 1.57$$

1) Rezolvaţi ecuaţia cu metoda NEWTON, luând toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

2) Rezolvaţi ecuaţia cu metoda SECANTEI, cu $EPS = 10^{-6}$.

3) Comparaţi numărul de iteraţii în cele două metode.

APLICAŢIA Nr. 6 / II

Se dă ecuaţia:

$$tg(x) = \frac{8 - x}{x + 0.2}$$

Găsiți rădăcina în jurul valorii $x_0 = 4.$, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$:

1) Cu metoda NEWTON;

2) Cu metoda SECANTEI;

3) Comparaţi numărul de iteraţii în cele două metode.

APLICAŢIA Nr. 7 / II

Se dă funcţia

$f(x) = 1 + x + e^{-px^2}\sin(x)$,

unde p este un parametru.

1) Găsiţi rădăcina din $(0, 1)$ pentru valorile $p = 1; \quad 5; \quad 30$, cu toleranţa

   $EPS = 10^{-6}$.

2) Rezolvaţi cu metoda Newton cazul $p = 30$, cu $EPS = 10^{-6}$ şi $x_0 = 0$.

   Comentaţi rezultatul.

APLICAŢIA Nr. 8 / II

Ecuaţia $e^x - 5x^2 = 0$ are o rădăcină în intervalul $[4.5, 5]$.

Consideraţi ecuaţia pusă sub forma $x = g(x)$, unde:

1) $g(x) = \sqrt{e^x / 5}$,

Iteraţi (în metoda punctului fix) cu $x_0 = 4.7$. Iteraţia nu conerge. De ce ?

2) $g(x) = x - m(e^x - 5x^2)$

   - Determinaţi m astfel ca procesul să fie convergent şi calculaţi răădăcina.
   - Găsiţi valoarea lui m pentru care iteraţia converge cel mai rapid.

APLICAŢIA Nr. 9 / II

Consideraţi ecuaţia $x = g(x)$, unde

$$g(x) = \frac{2.16 + 0.253tg(x)}{1 + tg(x)}$$

1) Iteraţi în simplă precizie cu $x_0 = 1.$, toleranţa $EPS = 10^{-6}$, şi numărul limită de iteraţii $NLIM \geq 2000$. Comentaţi rezultatul.
2) Repetaţi iterarea în dublă precizie şi găsiţi rădăcina cu toleranţa $EPS = 10^{-9}$.
3) Explicați de ce este nevoie de un număr foarte mare de iterații, până la verificarea unui test de oprire a iterației.

APLICAŢIA Nr. 10 / II

Determinaţi *f* din următoarea ecuație, pentru valorile: $\varepsilon / D = .001$; $\mathrm{Re} = 10^6$:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\ln\left(\frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right)$$

(Legea empirică a lui Colebrook pentru curgerea unui fluid în regim turbulent într-o conductă, unde: *f* = factorul de frecare Darcy; Re = numărul Reynolds; *D* = diametrul conductei; ε = rugozitatea suprafeţei (în unitatea de lungime). Legea este valabilă pentru: $4000 \leq \mathrm{Re} \leq 10^8$ şi $\varepsilon / D \leq 0.05$).

Indicație: Utilizaţi aproximaţia $f \approx 0.16(\mathrm{Re})^{-0.16}$ (Genereaux, 1939).

APLICAŢIA Nr. 11 / II

R. DeSantis (1976) deduce următoarea ecuaţie pentru factorul de compresibilitate z al unui gaz real:

$$z = \frac{1 + y + y^2 - y^3}{(1 - y)^3}$$

Găsiţi y pentru $z = 0.892$.

(Semnificaţie: $y = b/(4V)$, unde b este corecţia Van der Waals şi V volumul molar.)

APLICAŢIA Nr. 12 / II

Se dă funcţia:

$$Q(\alpha) = C\frac{(\pi + 2\alpha + \sin 2\alpha)^{\frac{5}{3}}}{(\pi + 2\alpha)^{\frac{2}{3}}}; \qquad 0 \le \alpha \le \pi/2.$$

Găsiţi α pentru care $Q(\alpha)$ este *maxim*, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

[Ecuaţia lui Manning: $Q(\alpha)$ reprezintă fluxul (debitul volumic) printr-o conductă circulară rugoasă. α defineşte gradul de umplere a conductei: perimetrul udat este arcul corespunzător lui $\pi + 2\alpha$ (radiani). C este un coeficient depinzând de raza, coeficientul de rugozitate şi panta conductei.]

APLICAŢIA Nr. 13 / II

Se dă polinomul LAGUERRE de ordinul 5:

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$$

1) Găsiţi aproximaţii iniţiale ale rădăcinilor (algebric, grafic, etc.)

2) Calculaţi rădăcinile, cu toleranţa 10^{-6}.

APLICAŢIA Nr. 14 / II

Polinomul

$$p(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$$

are rădăcinile: $x_1 = 1; x_2 = 2; \ldots ; x_6 = 6$.

Fie $\tilde{p}(x)$ polinomul obţinut din $p(x)$ înlocuind coeficientul $a_5 = -21$ a lui x^5, cu $\tilde{a}_5 = -21.003$.

- Calculaţi rădăcinile lui $\tilde{p}(x)$.
- Calculaţi modulul raportului: perturbaţia relativă a rădăcinii x_6 / perturbaţia relativă a coeficientului a_5. Comentaţi rezultatul.

  (Dacă *a* perturbat devine $\tilde{a}$, perturbaţia relativă este: $(\tilde{a} - a)/a$.)

APLICAŢIA Nr. 15 / II

Consideraţi polinomul

$$p(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

Calculaţi rădăcinile, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

Tipăriţi numărul de iteraţii şi comentaţi rezultatul.

APLICAŢIA Nr. 16 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} y^2 + y - x^2 = 1 \\ x - \sin(y)^2 = 0 \end{cases}$$

Rezolvaţi, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$, şi aproximaţiile iniţiale $w_0^{(1)} = (0.5, 0.7)$,

$w_0^{(2)} = (0.3, -1.5)$:

- prin metoda NEWTON;
- prin iterare cu matricea constantă A (cu actualizare la 3 paşi).

APLICAŢIA Nr. 17 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 4y^2 = 80 \\ x^2 + 4y = -4 \end{cases}$$

Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$. Găsiţi aproximaţiile iniţiale x_0, y_0 din intersecţia graficelor celor două curbe.

APLICAŢIA Nr. 18 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} xy - z^2 = 2 \\ -xyz - x^2 + y^2 = 4 \\ e^x - e^y - z = 7 \end{cases}$$

Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$

1) Cu aproximaţia iniţială $w_0 = (1, 1, 1)$

2) Cu aproximaţia iniţială $w_0 = (2, 2, -1)$

Comparaţi numărul de iteraţii şi explicaţi.

APLICAŢIA Nr. 19 / II

Se dă sistemul liniar cu matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi soluţia pentru termenul liber $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

2) Repetaţi punctul 1 cu matricea A' obţinută prin înlocuirile: $2.53 \to 2.54$ (element $(1, 3)$) şi $1.47 \to 1.48$ (element $(3, 3)$). Comparaţi rezultatele şi explicaţi.

APLICAŢIA Nr. 20 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi matricea inversă A^{-1}

2) Calculaţi numerele de condiţie $cond(A)_1$ şi $cond(A)_2$.

APLICAŢIA Nr. 21 / II

Stabiliţi dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.601 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.601 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

este bine sau rău condiţionată.

APLICAŢIA Nr. 22 / II

Se dă matricea HILBERT de ordinul 4:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix};$$ Elementele matricii sunt: $h_{ij} = 1./(i + j - 1)$.

1) Calculaţi H_4^{-1} în simplă precizie.

2) Calculaţi H_4^{-1} în dublă precizie.

3) Comparaţi elementele inverselor de la punctele 1 şi 2. Explicaţi rezultatul comparaţiei.

APLICAŢIA Nr. 23 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4.002 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4.002 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix};$$

1) Rezolvaţi sistemul liniar $Ax = b$, unde:

   $b = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$, şi $\widetilde{b} = [1.02 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$.

2) Stabiliţi raportul între: perturbaţia relativă maximă (în modul) în soluţie / perturbaţia relativă în termenul liber b_1. Comentaţi rezultatul

APLICAŢIA Nr. 24 / II

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0.8 \\ 1 & 0.9 \\ 1 & 1. \\ 1 & 0.9 \\ 1 & 0.8 \end{array}\right]$$

Matricea *A* este pozitiv definită.

1) Rezolvaţi sistemul prin metoda CHOLESKY.
2) Afişaţi matricea *L*, şi calculaţi determinantul matricii *A*.

APLICAŢIA Nr. 25 / II

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -36 & 12 \\ -36 & 218 & -74 \\ 12 & -74 & 64 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 & -1.8 \\ 1 & 10.8 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Matricea *A* este pozitiv definită.

1) Rezolvaţi sistemul prin metoda CHOLESKY.

2) Afişaţi matricea *L*, şi calculaţi determinantul matricii *A*.

APLICAŢIA Nr. 26 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -36 & 12 \\ -36 & 218 & -74 \\ 12 & -74 & 64 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi numerele de condiţie $cond(A)_1$ şi $cond(A)_\infty$.

2) Calculaţi numărul de condiţie $cond(A)_*$.

APLICAŢIA Nr. 27 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5.02 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5.02 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

- Calculaţi numărul de condiţie $cond(A)_*$.
- Este matricea bine sau rău-condiţionată ?

APLICAŢIA Nr. 28 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1;\quad a_{ij} = 1./(i+j-1) \ldots i > 1;\quad j = \overline{1,4}$.

1) Calculaţi A_4^{-1} în simplă precizie, introducând elementele lui A_4 în două moduri:
   a) Valorile elementelor, rotunjite la 7 cifre semnificative;
   b) Inversând prin program (prin cod), elementele din liniile 2...4.
2) Comparaţi elementele inverselor de la punctele a) şi b). Explicaţi de ce apar diferențe.

Notă: Elementele inversei exacte se cunosc analitic, și sunt numere intregi ■

APLICAŢIA Nr. 29 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1; \quad a_{ij} = 1./(i+j-1) \ldots i > 1; \quad j = \overline{1,4}$.

1) Calculaţi numerele de condiție $cond(A_4)_\infty$ și $cond(A_4)_1$, în simplă precizie, introducând elementele lui A_4 în două moduri:
   a) Valorile calculate cu 7 cifre semnificative corecte;
   b) Inversând prin program (prin cod), elementele din liniile 2...5.
2) Comparaţi rezultatele de la punctele a) şi b). Explicaţi de ce sunt diferite.

APLICAŢIA Nr. 30 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4, cu elementele reprezentate cu 6 cifre semnificative corecte:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \\ 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 \\ 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 \end{bmatrix}$$

(Valorile exacte ale elementelor sunt:

$a_{1j} = 1; \quad a_{ij} = 1./(i+j-1) \ldots i > 1; \quad j = \overline{1,5}$)

1) Rezolvați sistemul $A_4 x = b$, alegând termenii *b* liberi după voie.
2) Fie $\tilde{A}_4$ matricea obținută din A_4, înlocuind elementul $a_{22} = 0.333333$, cu $\tilde{a}_{22} = 0.333000$ (restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}_4 x = b$.
3) Comparați soluțiile. Este matricea A_4 bine sau rău condiționată ?
4) Calculați și determinanții celor două matrici.

APLICAŢIA Nr. 31 / II

Se dă matricea CAUCHY de ordinul 5:

$$A = \begin{bmatrix} 0.333333 & 0.200000 & 0.142857 & 0.090909 & 0.100000 \\ 0.200000 & 0.142857 & 0.111111 & 0.076923 & 0.083333 \\ 0.142857 & 0.111111 & 0.090909 & 0.066667 & 0.071429 \\ 0.100000 & 0.083333 & 0.071429 & 0.055556 & 0.058824 \\ 0.111111 & 0.090909 & 0.076923 & 0.058824 & 0.062500 \end{bmatrix}$$

1) Rezolvați sistemul $Ax = b$, alegând termenii b liberi după voie.
2) Fie $\tilde{A}$ matricea obținută din A, înlocuind elementul $a_{11} = 0.333333$, cu $\tilde{a}_{11} = 0.333000$ (restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}x = b$.
3) Comparați soluțiile. Este matricea A bine sau rău condiționată ?
4) Calculați și determinanții celor două matrici.

Notă:

- Gauss/LU: Modificați pragul (data `prag`) în `Main-Elim` (sau `LU-Decomp`) la 1E-8 !

APLICAŢIA Nr. 32 / II

Considerați matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lucrând în simplă precizie, cu un `prag` $\le$ `1E-7` în Gauss sau LU:

1) Calculați inversa A^{-1};
2) Fie $\tilde{A}$ matricea obținută din A, prin înlocuirea elementului $a_{44} = 4$ cu $\tilde{a}_{44} = 4.0001$. Calculați inversa $\tilde{A}^{-1}$.
3) Comparați eroarea la verificarea soluției – de la punctele 1) și 2), și explicați.