## APLICAŢIA Nr. 1 / III

Fiind dat un număr real $x > 0$, fie $y(x)$ cel mai mic număr (pozitiv), care adunat la *x* dă un rezultat care nu se rotunjeşte la *x* (este mai mare decât *x*).

Scrieţi un program care să determine $y(x)$ pentru $x = 2, 3, \ldots, 18$, şi verificaţi că $x + y(x) > x$.

## APLICAŢIA Nr. 2 / III

Calculaţi valorile următoarelor funcţii, pentru valorile $x = 10^i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

$f(x) = x(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-3})$ - în simplă precizie;

$f2(x) = x(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-3})$ - în dublă precizie;

$g(x) = \dfrac{7x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3}}$ - în simplă precizie,

- Tabelaţi valorile calculate astfel: $f2(x)$ cu 8 cifre semnificative corecte, și $f(x), g(x)$ cu numărul maxim de cifre semnificative asigurate de precizia simplă. Explicaţi rezultatele.
- Stabiliţi numarul de cifre semnificative corecte ale valorii $f(x)$ pentru $x = 10^3$.

## APLICAŢIA Nr. 3 / III

Ecuaţia $f(x) = e^x - x^4 = 0$ are două rădăcini.

- Găsiţi intervalele de lungime 1, care conţin rădăcinile.
- Găsiţi rădăcinile cu metoda BISECŢIEI, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$.
- Regăsiţi rădăcinile cu metoda SECANTEI, cu aceeaşi toleranţă, şi comparaţi numărul de iteraţii.

## APLICAŢIA Nr. 4 / III

Se dă ecuaţia $f(x) = 0$, unde:

$f(x) = 0.61 + 1.07\cos(x) - x$

Rezolvaţi ecuaţia cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$, prin:

1) Metoda Secantei;
2) Metoda Newton.

## APLICAŢIA Nr. 5 / III

Se dă ecuaţia:

$$tg(x) = \frac{1.82 - x}{x - 0.2}$$

1) Rezolvaţi ecuaţia cu metoda NEWTON, luând $x_0 = 0.8$ şi toleranţa

   $EPS = 10^{-6}$.

2) Rezolvaţi ecuaţia cu metoda SECANTEI, cu $x_0 = 0.7$, $x_1 = 0.9$, $EPS = 10^{-6}$.

3) Comparaţi numărul de iteraţii în cele două metode.

## APLICAŢIA Nr. 6 / III

Se dă funcţia

$$f(x) = -x + e^{-px^3} \cos(x),$$

unde $p$ este un parametru.

Ecuaţia $f(x) = 0$ are o rădăcină unică în intervalul $(0, 1)$.

1) Găsiţi rădăcina pentru valorile $p = 1;\quad 5;\quad 40$, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$

2) Rezolvaţi cu metoda Newton cazul $p = 40$, cu $EPS = 10^{-6}$ şi $x_0 = 0$.

   Comentaţi rezultatul.

## APLICAŢIA Nr. 7 / III

Se dă ecuaţia anuităţilor

$P_1[(1+r)^{N_1}-1]=P_2[1-(1+r)^{-N_2}]$

în care: $r$ = rata dobânzii anuale; $P_1$ = suma depusă la începutul anilor

$1, 2, \ldots, N_1$; $P_2$ = suma plătită la începutul anilor $N_1+1, N_2+1, \ldots, N_1+N_2$.

După ultima plată, soldul contului este zero.

Găsiţi $r$ pentru valorile: $N_1=35$, $N_2=25$, $P_1=5000$, $P_2=10000$, cu:

a) metoda Newton;

b) metoda Secantei.

## APLICAŢIA Nr. 8 / III

Ecuaţia $e^x-2x^2=0$ are 3 rădăcini.

Pentru rădăcinile pozitive, consideraţi ecuaţia pusă sub forma $x=g(x)$, unde:

1) $g(x)=\sqrt{e^x/2}$.

Iteraţi (în metoda punctului fix), cu $x_0=0.5$ pentru prima rădăcină, şi cu

$x_0=2.5$ pentru a doua. Luaţi toleranţa $XTOL=10^{-6}$.

2) $g(x)=x-m(e^x-4x^2)$

Pentru rădăcina din vecinătatea lui $x_0=2.5$:

- Determinaţi $m$ astfel ca procesul să fie convergent şi calculaţi răădăcina.
- Găsiţi valoarea lui $m$ pentru care iteraţia converge cel mai rapid.

## APLICAŢIA Nr. 9 / III

Consideraţi ecuaţia $x = g(x)$, unde

$g(x) = 0.61 + 1.07\cos(x)$

1) Iteraţi în simplă precizie cu $x_0 = 1.2$, toleranţa $EPS = 10^{-6}$, şi numărul limită de iteraţii $NLIM \geq 300$. Comentaţi rezultatul.
2) Repetaţi iterarea în dublă precizie şi găsiţi rădăcina cu toleranţa $EPS = 10^{-9}$.

## APLICAŢIA Nr. 10 / III

Se dă polinomul CHEBISHEV de genul al doilea, de ordinul 6:

$T_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

1) Găsiţi aproximaţii iniţiale ale rădăcinilor (algebric, grafic, etc.)
2) Calculaţi rădăcinile, cu toleranţa $10^{-6}$.

*Notă*: Toate rădăcinile sunt de modul < 1.

## APLICAŢIA Nr. 11 / III

Polinomul

$$p(x) = x^5 - 18x^4 + 118x^3 - 348x^2 + 457x - 210$$

are rădăcinile: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3;\ x_4 = 5;\ x_5 = 7$.

Fie $\tilde{p}(x)$ polinomul obţinut din $p(x)$ înlocuind coeficientul $a_3 = 118$ a lui $x^3$, cu $\tilde{a}_3 = 118.02$.

- Calculaţi rădăcinile lui $\tilde{p}(x)$.
- Calculaţi modulul raportului dintre: perturbaţia relativă maximă în (modul) a rădăcinilor / perturbaţia relativă a coeficientului $a_3$. Comentaţi rezultatul.

  (Dacă $a$ perturbat devine $\tilde{a}$, perturbaţia relativă este: $(\tilde{a} - a)/a$.)

## APLICAŢIA Nr. 12 / III

În problema interceptării unei rachete, se obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} t\cos(\alpha) + t - 1 = 0 \\ t\sin(\alpha) - 0.1t^2 - e^{-t} - 1 = 0 \end{cases}$$

($t$ este timpul, iar $\alpha$ unghiul de lansare al interceptorului.)

Rezolvaţi sistemul, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$ şi aproximaţia iniţială $w_0 = (0.5, 1)$, prin:

1) Iterare cu matricea constantă $A$ (cu actualizare la 3 paşi)
2) Metoda NEWTON.

## APLICAŢIA Nr. 13 / III

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + 2\sin(y) + z = -0.1 \\ \cos(y) - z = 2.1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

Găsiţi soluţia din vecinătatea lui $w_0 = (1, 0, -1)$, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$, prin metoda Newton, sau prin iterare cu matricea constantă *A* (cu actualizare la 3 paşi).

## APLICAŢIA Nr. 14 / III

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y)^{1/2} = 3 \\ x - \log(x-y) = 1 \end{cases}$$

Rezolvaţi prin iterare cu matricea constantă *A* (cu actualizare la 3 paşi), cu:

- Toleranţa $EPS = 10^{-6}$.
- Aproximaţia iniţială: $w_0 = (2, -0.5)$.

## APLICAŢIA Nr. 15 / III

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = x + 0.1 \\ \cos(x-y) = y + 0.5 \end{cases}$$

- Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$: Găsiţi radăcina din vecinătatea punctului $w_0 = (1, 0)$
- Rezolvaţi din nou, prin iterare cu matricea constantă *A* (cu actualizare la 3 paşi).

## APLICAŢIA Nr. 16 / III

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \sin(xy) = 0.5 \\ \cos(x) = e^{y} \end{cases}$$

- Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$: Găsiţi radăcinile din vecinătatea punctelor $w_0 = (-1, -0.5)$ şi , $w_0 = (5, -1)$.
- Rezolvaţi din nou, prin iterare cu matricea constantă *A* (cu actualizare la 3 paşi).

## APLICAŢIA Nr. 17 / III

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \\ f_2(x,y) = -x^2 + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$. Determinaţi aproximaţiile iniţiale din intersecţia graficelor curbelor $f_1(x,y) = 0$ şi $f_2(x,y) = 0$.

## APLICAŢIA Nr. 18 / III

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z^2 = 3.8 \\ xyz = -1.9 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} - z^2 = 1.3 \end{cases}$$

Găsiţi prin iterare cu matricea constantă $A$ (cu actualizare la 3 paşi), rădăcina din vecinătatea lui $w_0 = (1.5, 1, -1)$, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

## APLICAŢIA Nr. 19 / III

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5.01 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5.01 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi soluţia pentru termenii liberi $b = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]^T$ şi

   $\tilde{b} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4.01]^T$

2) Stabiliţi raportul între: perturbaţia relativă maximă (în modul) în soluţie / perturbaţia relativă în termenul liber $b_4$. Comentaţi rezultatul.

## APLICAŢIA Nr. 20 / III

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5.01 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5.01 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi matricea inversă $A^{-1}$

2) Calculaţi numerele de condiţie $cond(A)_1$ şi $cond(A)_\infty$.

## APLICAŢIA Nr. 21 / III

Stabiliţi dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8.01 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8.01 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

este bine sau rău condiţionată.

## APLICAŢIA Nr. 22 / III

Se dă matricea HILBERT de ordinul 4:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

( Elementele matricii sunt: $h_{ij} = 1./(i + j - 1)$ )

1) Calculaţi $H_4^{-1}$, în simplă precizie.

2) Calculaţi numărul de condiţie $cond(H_4)_1$.

## APLICAŢIA Nr. 23 / III

Se dă matricea HILBERT de ordinul 4:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

1) Rezolvaţi sistemul liniar $H_4 x = b$, pentru:

   $b = [1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4]^T$, şi. $b = [1.02 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4]^T$

2) Stabiliţi raportul între: perturbaţia relativă maximă (în modul) în soluţie / perturbaţia relativă în termenul liber $b_1$. Comentaţi rezultatul.

## APLICAŢIA Nr. 24 / III

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \left[\begin{array}{c:c} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{array}\right]$$

Matricea $A$ este pozitiv definită.

1) Rezolvaţi sistemul prin metoda CHOLESKY.

2) Afişaţi matricea $L$, şi calculaţi determinantul matricii $A$.

## APLICAŢIA Nr. 25 / III

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{array}\right]$$

Matricea *A* este pozitiv definită.

1) Rezolvaţi sistemul prin metoda CHOLESKY.

2) Afişaţi matricea *L* (sau *S*), şi calculaţi determinantul matricii *A*.

## APLICAŢIA Nr. 26 / III

Se dă matricea *A*, de ordinul 5, cu elementele de mai jos (Wilkinson):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.604800 | 0.453600 | 0.362880 | 0.302400 | 0.259200 |
| 0.453600 | 0.362880 | 0.302400 | 0.259200 | 0.226800 |
| 0.362880 | 0.302400 | 0.259200 | 0.226800 | 0.201600 |
| 0.302400 | 0.259200 | 0.226800 | 0.201600 | 0.181440 |
| 0.259200 | 0.226800 | 0.201600 | 0.181440 | 0.164945 |

1) Calculaţi numerele de condiţie $cond(A)_1$ şi $cond(A)_\infty$.

2) Este matricea bine sau rău-condiționată?

## APLICAŢIA Nr. 27 / III

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 4 \end{bmatrix}$$

- Calculaţi numărul de condiţie $cond(A)_*$.
- Este matricea bine sau rău-condiţionată ?

## APLICAŢIA Nr. 28 / III

Se dă matricea de ordinul 5:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 11 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 13 & 12 \\ 7 & 9 & 11 & 15 & 14 \\ 10 & 12 & 14 & 18 & 17 \\ 9 & 11 & 13 & 17 & 16 \end{bmatrix}$$

Se consideră matricea $A = [a_{ij}]$, tot de ordinul 5, cu elementele egale cu <u>inversele</u> celor din *B*, adică:

$$a_{ij} = \frac{1.}{b_{ij}}, \quad i, j = \overline{1,5}$$

(*A* este o matrice Cauchy.)

1) Calculaţi $A^{-1}$ în simplă precizie, introducând elementele lui $A$ în două moduri:
   a) Valorile calculate cu 7 cifre semnificative corecte;
   b) Inversând prin program (prin cod), elementele lui *B*, din liniile 2...5.
2) Comparaţi elementele inverselor de la punctele a) şi b). Explicaţi de ce apar diferenţe.

## APLICAȚIA Nr. 29 / III

Se dă matricea de ordinul 5:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1./2 & 1./2 & 1./2 & 1./2 & 1./2 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 & 1./8 \\ 1./5 & 1./6 & 1./7 & 1./8 & 1./9 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1./2;\quad a_{ij} = 1./(i + j - 1) \ldots i > 1;\quad j = \overline{1,5}$.

1) Calculaţi numerele de condiție $cond(A_5)_\infty$ și $cond(A_5)_1$ , în simplă precizie, introducând elementele lui $A_5$ în două moduri:
   a) Valorile calculate cu 7 cifre semnificative corecte;
   b) Inversând prin program (prin cod), elementele din liniile 2...5.
2) Comparaţi rezultatele de la punctele a) şi b). Explicaţi de ce sunt diferite.

## APLICAȚIA Nr. 30 / III

Se dă următoarea matrice de ordinul 5 (Moler2):

$$A_5 = \begin{bmatrix} -9.00000 & 11.00000 & -21.00000 & 63.00000 & -252.0000 \\ 70.0000 & -69.00000 & 141.0000 & -421.0000 & 1684.000 \\ -575.000 & 575.000 & -1149.000 & 3451.000 & -13801.00 \\ 3891.000 & -3891.000 & 7782.000 & -23345.000 & 93365.00 \\ 1024.000 & -1024.000 & 2048.000 & -6144.000 & 24572.00 \end{bmatrix}$$

1) Rezolvați sistemul $A_5 x = b$ , alegând termenii $b$ liberi după voie.
2) Fie $\tilde{A}_5$ matricea obținută din $A_5$, înlocuind elementul $a_{22} = -69.000$, cu $\tilde{a}_{22} = -69.001$(restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}_5 x = b$ .
3) Comparați soluțiile. Este matricea $A_5$ bine sau rău condiționată ?

<u>Notă:</u>

- Gauss/LU (simplă precizie): Modificați pragul (data `prag`) în `Main-Elim` (sau `LU-Decomp`) la `1E-8` !
- Sau: Utilizați programele în dublă precizie: Gauss_D; LU_D.

## APLICAȚIA Nr. 31 / III

Se dă matricea de ordinul 5 (Moler):

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 3.000000 & 3.000000 & 3.000000 & 3.000000 \\ 3.000000 & 10.000000 & 12.000000 & 12.000000 & 12.000000 \\ 3.000000 & 12.000000 & 19.000000 & 21.000000 & 21.000000 \\ 3.000000 & 12.000000 & 21.000000 & 28.000000 & 30.000000 \\ 3.000000 & 12.000000 & 21.000000 & 30.000000 & 37.000000 \end{bmatrix}$$

1) Calculați inversa $A_5^{-1}$.
2) Este matricea $A_5$ bine sau rău condiționată ?
3) Calculați și determinantul matricii.

<u>Notă:</u>

- Gauss/LU(simplă precizie): Modificați pragul (data `prag`) în `Main-Elim` (sau `LU-Decomp`) la `1E-8` !

## APLICAȚIA Nr. 32 / III

Considerați matricea (Wilkinson 4 – modificată):

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0.000091 & 0.0 & 0.0 & 0.00001 \\ 0.8762 & 0.000072 & 0.0 & 0.0 \\ 0.7943 & 0.8143 & 0.000095 & 0.0 \\ 0.8017 & 0.6120 & 0.7165 & 0.000071 \end{bmatrix}$$

Lucrând în simplă precizie, cu un `prag` $\leq$ `1E-7` în Gauss sau LU:

1) Calculați inversa $A_4^{-1}$;
2) Fie $\widetilde{A}_4$ matricea obținută din $A_4$, prin înlocuirea elementului $a_{14} = 0.00001$ cu $\widetilde{a}_{14} = 0.00002$. Calculați inversa $\widetilde{A}_4^{-1}$;
3) Comparați soluțiile – de la punctele 1) și 2). Conchideți asupra condiționării matricii $A_4$.