

APLICAȚIA Nr. 1 / II

Următoarele date numerice sunt reprezentate în formatul dublu:

$$x = 1E308; \quad x = 5E308;$$

$$x = 5E - 308; \quad x = 1E - 308; \quad x = 1E - 325;$$

1) Să se găsească următorii parametri ai reprezentării:

- Exponentul cu deplasare (sau exponentul stocat); Exponent.
- Semnificandul (*sig*), și fracția în model (*fr*). Pentru o dată numerică finită avem $sig = 2 * fr$. De ce ?

2) Clasa datei numerice (tipul de dată).

APLICAȚIA Nr. 2 / II

Pentru următoarele numere:

$$x = 1.0; \quad x = 3.0 \times 10^{17}$$

1) Calculați: $ULP(x)$, $x_1 = x + ULP(x)$, and $x_2 = x + \frac{1}{2}ULP(x)$.

Verificați dacă $x_2 = x$ sau $x_2 > x$.

2) Găsiți numerele în virgulă flotantă cele mai apropiate de x , anume:

x^- = cel mai apropiat și mai mic decât x ;

x^+ = cel mai apropiat și mai mare decât x .

Calculați diferențele: $x - x^-$ and $x^+ - x$, și exprimați-le ca un multiplu (sau fracțiune) al $ULP(x)$.

APLICAȚIA Nr. 3 / II

Calculați valorile următoarelor funcții, pentru valorile $x = 10^i$, $i = 1, 2, \dots, 7$.

$$f(x) = \frac{x}{10} (\sqrt{x^2 + 400} - \sqrt{x^2 + 100}) \quad - \text{ în simplă precizie;}$$

$$f2(x) = \frac{x}{10} (\sqrt{x^2 + 400} - \sqrt{x^2 + 100}) \quad - \text{ în dublă precizie;}$$

$$g(x) = \frac{30x^2}{\sqrt{x^2 + 400} + \sqrt{x^2 + 100}} \quad - \text{ în simplă precizie,}$$

- Tabelați valorile calculate astfel: $f2(x)$ cu 8 cifre semnificative corecte:
 $f(x)$ și $g(x)$, cu 7 cifre semnificative. Explicați rezultatele.
- Stabiliți numărul de cifre semnificative corecte ale valorii $f(x)$ pentru $x = 10^4$, considerând valorile $f2(x)$ ca valori exacte.

APLICAȚIA Nr. 4 / II

Ecuția $f(x) = e^x - 3.7x^{2/3} = 0$ are trei rădăcini.

Fie x_0 o aproximație a rădăcinii. Găsiți cele trei rădăcini, cu toleranța

$XTOL = 10^{-6}$, prin:

- 1) Metoda Secantei: cu aproximațiile $x_0 \pm h$, unde $0 < h \leq x_0/10$.
- 2) Metoda Newton: aproximație x_0 .
- 3) O metodă de ordinul 3: aproximație x_0 .

Comparați numărul de iterații.

APLICAȚIA Nr. 5 / II

Ecuția $f(x) = e^x - 5x^2 = 0$ are trei rădăcini.

- 1) Găsiți aproximații ale rădăcinilor.
- 2) Pentru rădăcina pozitivă mai mare, iterați în metoda punctului fix, astfel:
 - a) Puneți ecuația sub forma $x = g(x)$, $g(x) = e^{x/2} / \sqrt{5}$. Iterația nu converge către rădăcina căutată. De ce?
 - b) Aplicați o procedură explicită de punct fix, astfel ca iterația să convergă, și găsiți rădăcina cu toleranța minimă $XTOL_{\min}$.

APLICAȚIA Nr. 6 / II

Se dă ecuația $f(x) = 0$, unde:

$$f(x) = 0.99 \cos(x) - x + 1.57$$

- 1) Rezolvați ecuația cu metoda NEWTON, luând toleranța $EPS = 10^{-6}$.
- 2) Rezolvați ecuația cu metoda SECANTEI, cu $EPS = 10^{-6}$.
- 3) Comparați numărul de iterații în cele două metode.

APLICAȚIA Nr. 7 / II

Se dă ecuația:

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{8-x}{x+0.2}$$

Găsiți rădăcina în jurul valorii $x_0 = 4.$, cu toleranța minimă EPS_{\min} :

- 1) Cu metoda NEWTON;
- 2) Cu metoda SECANTEI;

Comparați numărul de iterații în cele două metode.

APLICAȚIA Nr. 8 / II

Se dă funcția

$$f(x) = 1 + x + e^{-px^2} \sin(x),$$

unde p este un parametru.

- 1) Găsiți rădăcina din $(0, 1)$ pentru valorile $p = 1; 5; 30$, cu toleranța

$$EPS = 10^{-6}.$$

- 2) Rezolvați cu metoda Newton cazul $p = 30$, cu $EPS = 10^{-6}$ și $x_0 = 0$.

Comentați rezultatul.

APLICAȚIA Nr. 9 / II

Se dă ecuația $f(x) = 0$, unde:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2\sin x - x + 0.94$$

Găsiți cele două rădăcini din intervalul $[7, 9]$, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$:

- 1) cu metoda NEWTON – cu aproximația x_0 ;
- 2) cu metoda SECANTEI – cu aproximații apropiate de x_0 .

Comparați numărul de iterații în cele două metode

APLICAȚIA Nr. 10 / II

Considerați ecuația $x = g(x)$, unde

$$g(x) = \frac{2.16 + 0.253tg(x)}{1 + tg(x)}$$

- 4) Iterați în simplă precizie cu $x_0 = 1.$, toleranța $EPS = 10^{-6}$, și numărul limită de iterații $NLIM \geq 2000$. Comentați rezultatul.
- 5) Repetați iterarea în dublă precizie și găsiți rădăcina cu toleranța $EPS = 10^{-9}$.
- 6) Explicați de ce este nevoie de un număr foarte mare de iterații, până la verificarea unui test de oprire a iterației.

APLICAȚIA Nr. 11 / II

Se dă funcția:

$$Q(\alpha) = C \frac{(\pi + 2\alpha + \sin 2\alpha)^{\frac{5}{3}}}{(\pi + 2\alpha)^{\frac{2}{3}}}; \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2.$$

Găsiți α pentru care $Q(\alpha)$ este maxim, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$.

[Ecuția lui Manning: $Q(\alpha)$ reprezintă fluxul (debitul volumic) printr-o conductă circulară rugoasă. α definește gradul de umplere a conductei: perimetrul udat este arcul corespunzător lui $\pi + 2\alpha$ (radiani). C este un coeficient depinzând de raza, coeficientul de rugozitate și panta conductei.]

APLICAȚIA Nr. 12 / II

Se dă polinomul LAGUERRE de ordinul 5:

$$L_5(x) = \frac{1}{120} (-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$$

- 1) Găsiți aproximații inițiale ale rădăcinilor (algebric, grafic, etc.)
- 2) Calculați rădăcinile, cu toleranța 10^{-6} .
- 3) Modificați coeficientul lui x^4 , din +25 în +26. Recalculați rădăcinile și comentați rezultatul.

APLICAȚIA Nr. 13 / II

Polinomul

$$p(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$$

are rădăcinile: $x_1 = 1; x_2 = 2; \dots; x_6 = 6$.

Fie $\tilde{p}(x)$ polinomul obținut din $p(x)$ înlocuind coeficientul $a_5 = -21$ a lui x^5 , cu

$$\tilde{a}_5 = -21.003.$$

- Calculați rădăcinile lui $\tilde{p}(x)$.
- Calculați modulul raportului: perturbația relativă a rădăcinii x_6 / perturbația relativă a coeficientului a_5 . Comentați rezultatul.

(Dacă a perturbat devine \tilde{a} , perturbația relativă este: $(\tilde{a} - a) / a$.)

APLICAȚIA Nr. 14 / II

Considerați polinomul

$$p(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

- Studiați existența unei rădăcini multiple.
- Calculați rădăcinile, în precizie cvadruplă (IVF), sau precizie dublă (CVF).

APLICAȚIA Nr. 15 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} y^2 + y - x^2 = 1 \\ x - \sin(y)^2 = 0 \end{cases}$$

- 1) Găsiți două aproximații inițiale (x_0, y_0) , unde $x_0 \in (0, 1)$.
- 2) Rezolvați, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$,
 - prin metoda NEWTON;
 - prin iterare cu matricea constantă A (cu actualizare la 3 pași).

APLICAȚIA Nr. 16 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 4y^2 = 80 \\ x^2 + 4y = -4 \end{cases}$$

- 1) Găsiți aproximațiile inițiale x_0, y_0 din intersecția graficelor celor două curbe.
- 2) Rezolvați prin metoda NEWTON – cu jacobianul exact, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$.
- 3) Rezolvați prin metoda NEWTON – cu jacobianul calculat numeric.

APLICAȚIA Nr. 17 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} xy - z^2 = 2 \\ -xyz - x^2 + y^2 = 4 \\ e^x - e^y - z = 7 \end{cases}$$

Rezolvați prin metoda NEWTON, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$

- 1) Cu aproximația inițială $w_0 = (1, 1, 1)$
- 2) Cu aproximația inițială $w_0 = (2, 2, -1)$

Comparați numărul de iterații și explicați.

APLICAȚIA Nr. 18 / II

Se consideră sistemul (Vahidi 2012):

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 0.5 = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0 \end{cases}$$

- 1) Găsiți o aproximație inițială $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, știind că x_2 are o valoare mică;
- 2) Rezolvați prin metoda NEWTON, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$.

APLICAȚIA Nr. 19 / II

Se dă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} t \cos \alpha + t = 1 \\ t \sin \alpha - 0.1t^2 - e^{-t} = 1 \end{cases}$$

Rezolvați sistemul, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$ și aproximația inițială $w_0 = (x_0, y_0)$,

unde $x_0 \in (0, 1)$, prin:

- 1) Iterare cu matricea constantă A (cu actualizare la 3 pași)
- 2) Metoda NEWTON.

APLICAȚIA Nr. 20 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix}$$

- 1) Calculați matricea inversă A^{-1}
- 2) Calculați numerele de condiție $cond(A)_1$ și $cond(A)_*$.

APLICAȚIA Nr. 21 / II

Stabiliți dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.601 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.601 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

este bine sau rău condiționată.

APLICAȚIA Nr. 22 / II

Se dă matricea HILBERT de ordinul 4:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}; \quad \text{Elementele matricii sunt: } h_{ij} = 1/(i+j-1).$$

- 1) Calculați H_4^{-1} în simplă precizie.
- 2) Calculați H_4^{-1} în dublă precizie.
- 3) Comparați elementele inverselor de la punctele 1 și 2. Explicați rezultatul comparației.

APLICAȚIA Nr. 23 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4.002 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4.002 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix};$$

1) Rezolvați sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$b = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T, \text{ și } \tilde{b} = [1.02 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

2) Stabiliți raportul între: perturbația relativă maximă (în modul) în soluție / perturbația relativă în termenul liber b_1 . Comentați rezultatul.

APLICAȚIA Nr. 24 / II

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{matrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 1. \\ 0.9 \\ 0.8 \end{matrix}$$

Matricea A este pozitiv definită.

- 1) Rezolvați sistemul prin metoda CHOLESKY.
- 2) Afișați matricea S (sau L), și calculați determinantul matricii A .
- 3) Modificați elementele (1,2) și (2,1), din 1 în 6.2. Rezolvați sistemul.

APLICAȚIA Nr. 25 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -36 & 12 \\ -36 & 218 & -74 \\ 12 & -74 & 64 \end{bmatrix}$$

- 1) Calculați numărul de condiție $cond(A)_1$.
- 2) Calculați numărul de condiție $cond(A)_*$.

APLICAȚIA Nr. 26 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5.02 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5.02 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

- Calculați numărul de condiție $cond(A)_*$.
- Este matricea bine sau rău-condiționată ?

APLICAȚIA Nr. 27 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1$; $a_{ij} = 1./(i + j - 1) \dots i > 1$; $j = \overline{1,4}$.

- 1) Calculați A_4^{-1} în simplă precizie, introducând elementele lui A_4 în două moduri:
 - a) Valorile elementelor, rotunjite la 7 cifre semnificative;
 - b) Inversând prin program (prin cod), elementele din liniile 2...4.
- 2) Comparați elementele inverselor de la punctele a) și b). Explicați de ce apar diferențe.

Notă: Elementele inversei exacte se cunosc analitic, și sunt numere întregi ■

APLICAȚIA Nr. 28 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1$; $a_{ij} = 1./(i + j - 1) \dots i > 1$; $j = \overline{1,4}$.

- 1) Calculați numerele de condiție $cond(A_4)_\infty$ și $cond(A_4)_1$, în simplă precizie, introducând elementele lui A_4 în două moduri:
 - a) Valorile calculate cu 7 cifre semnificative corecte;
 - b) Inversând prin program (prin cod), elementele din liniile 2...4.
- 2) Comparați rezultatele de la punctele a) și b). Explicați de ce sunt diferite.

APLICAȚIA Nr. 29 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4, cu elementele reprezentate cu 6 cifre semnificative corecte:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \\ 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 \\ 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 \end{bmatrix}$$

(Valorile exacte ale elementelor sunt:

$$a_{1j} = 1; \quad a_{ij} = 1/(i+j-1) \dots i > 1; \quad j = \overline{1,4})$$

- 1) Rezolvați sistemul $A_4 x = b$, alegând termenii b liberi după voie.
- 2) Fie \tilde{A}_4 matricea obținută din A_4 , înlocuind elementul $a_{22} = 0.333333$, cu $\tilde{a}_{22} = 0.333000$ (restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}_4 x = b$.
- 3) Comparați soluțiile. Este matricea A_4 bine sau rău condiționată ?
- 4) Calculați și determinanții celor două matrici.

APLICAȚIA Nr. 30 / II

Se dă matricea CAUCHY de ordinul 5:

$$A = \begin{bmatrix} 0.333333 & 0.200000 & 0.142857 & 0.090909 & 0.100000 \\ 0.200000 & 0.142857 & 0.111111 & 0.076923 & 0.083333 \\ 0.142857 & 0.111111 & 0.090909 & 0.066667 & 0.071429 \\ 0.100000 & 0.083333 & 0.071429 & 0.055556 & 0.058824 \\ 0.111111 & 0.090909 & 0.076923 & 0.058824 & 0.062500 \end{bmatrix}$$

- 1) Rezolvați sistemul $Ax = b$, alegând termenii b liberi după voie.
- 2) Fie \tilde{A} matricea obținută din A , înlocuind elementul $a_{11} = 0.333333$, cu $\tilde{a}_{11} = 0.333000$ (restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}x = b$.
- 3) Comparați soluțiile. Este matricea A bine sau rău condiționată ?
- 4) Calculați și determinanții celor două matrici.

Notă: Gauss/LU: Modificați pragul (data prag) în Main-Elim (sau LU-Decomp) la 1E-8 !

APLICAȚIA Nr. 31 / II

Considerați matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lucrând în simplă precizie, cu un prag $\leq 1\text{E-}7$ în Gauss sau LU:

- 1) Calculați inversa A^{-1} ;
- 2) Fie \tilde{A} matricea obținută din A , prin înlocuirea elementului $a_{44} = 4$ cu $\tilde{a}_{44} = 4.0001$. Calculați inversa \tilde{A}^{-1} .
- 3) Comparați eroarea la verificarea soluției – de la punctele 1) și 2), și explicați.

APLICAȚIA Nr. 32 / II

Se dă matricea A , 4×4 , cu următoarele elemente:

0.715	5.280	3.795	0.210
0.495	4.840	4.335	0.330
0.330	4.335	4.840	0.495
0.210	3.795	5.280	0.715

- 1) Calculați numerele de condiție $cond(A)_\infty$ și $cond(A)_1$.
- 2) Este A bine sau rău-condiționată?