APLICAŢIA Nr. 1 / I

Următoarele date numerice sunt reprezentate în formatul simplu:

$x = 1E38$; $x = 4E38$;

$x = 5E-38$; $x = 1E-41$; $x = 1E-45$;

Să se găsească următorii parametri ai reprezentării:

- Exponentul cu deplasare (sau exponentul stocat); Exponent.
- Semnificandul (*sig*), și fracția în model (*fr*). Pentru o dată numerică finită avem $sig = 2 * fr$. De ce ?

APLICAŢIA Nr. 2 / I

Pentru următoarele numere:

$x = 1.0$; $x = 3.0 \times 10^{16}$

1) Calculați: $ULP(x)$, $x_1 = x + ULP(x)$, and $x_2 = x + \frac{1}{2} ULP(x)$.

   Verificați dacă $x_2 = x$ sau $x_2 > x$.

2) Găsiți numerele în virgulă flotantă cele mai apropiate de *x*, anume:

   X^- = cel mai apropiat și mai mic decât *x*;

   X^+ = cel mai apropiat și mai mare decât *x*.

   Calculați diferențele: $x - X^-$ and $X^+ - x$, și exprimați-le ca un multiplu (sau fracțiune) al $ULP(x)$.

APLICAŢIA Nr. 3 / I

Calculaţi valorile următoarelor funcţii, pentru valorile $x = 10^i$, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

$f(x) = \frac{x}{10}(\sqrt{x^2 + 1000} - x)$ - în simplă precizie;

$f2(x) = \frac{x}{10}(\sqrt{x^2 + 1000} - x)$ - în precizia maximă disponiblă;

$g(x) = \frac{100x}{\sqrt{x^2 + 1000} + x}$ - în simplă precizie,

- Tabelaţi valorile calculate astfel: $f2(x)$ cu 8 cifre semnificative corecte:

  $f(x)$ și $g(x)$, cu 7 cifre semnificative. Explicaţi rezultatele.

- Stabiliţi numarul de cifre semnificative corecte ale valorii $f(x)$ pentru

  $x = 10^4$, considerând valorile $f2(x)$ ca valori exacte.

APLICAŢIA Nr. 4 / I

Se dă ecuaţia $f(x) = 0$, unde

$f(x) = 1.5 - 0.9\cos(x) - 0.1\sin(x) + x$

Fie x_0 o aproximație a rădăcinii. Găsiți rădăcina cu toleranţa $XTOL = 10^{-6}$, prin:

1) Metoda Secantei: cu aproximațiile $x_0 \pm h$, unde $0 < h \le x_0 / 10$.

2) Metoda Newton: aproximație x_0.

3) O metodă de ordinul 3: aproximație x_0.

Comparați numărul de iterații.

APLICAŢIA Nr. 5 / I

Se dă ecuaţia:

$$tg(x) = \frac{1.8 - x}{x + 0.2}$$

Găsiți rădăcina în apropierea lui $x_0 = 2.5$, prin:

1) Metoda PUNCTULUI FIX: Stabiliți și utilizați toleranța minimă $XTOL_{\min}$.

2) Metoda NEWTON: cu toleranța minimă $EPS_{\min}$.

Comparaţi numărul de iteraţii în cele două metode.

APLICAŢIA Nr. 6 / I

Se dă funcţia

$$f(x) = x + e^{-px^2}\cos(x),$$

unde *p* este un parametru.

Ecuaţia $f(x) = 0$ are o rădăcină unică în intervalul $(-1, 0)$.

1) Găsiţi rădăcina pentru valorile $p = 1; \quad 5; \quad 25$, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$

2) Aplicați metoda Newton cazul $p = 25$, cu $EPS = 10^{-6}$ şi $x_0 = 0$. Comentaţi rezultatul.

APLICAŢIA Nr. 7 / I

Se dă ecuaţia

$$e^{-t/2} \cosh^{-1}(e^{t/2}) = \sqrt{0.5 L_{cr}}$$

(Frank-Kamenetski, 1955: *t* este temperatura în interiorul unui material cu surse de căldură incorporate).

Pentru valoarea $L_{cr} = 0.088$, găsiți *t* prin:

1) Metoda punctului fix;

2) Altă metodă numerică.

Utilizați: toleranța 10^{-5}, și aproximații inițiale identice sau apropiate în (1) și (2).

Comparați rezultatele.

APLICAŢIA Nr. 8 / I

Ecuaţia $e^{x} - 4x^{2} = 0$ are trei rădăcini.

1) Găsiți aproximații ale rădăcinilor.

2) Pentru rădăcina <u>pozitivă mai mare</u>:

    2.1) Puneți ecuaţia sub forma $x = g(x)$, unde $g(x) = e^{x/2}/2$.

    Iteraţi (în metoda punctului fix), cu toleranţa $XTOL = 10^{-6}$. Iterația nu converge către rădăcina considerată. De ce?

    2.2) Luați $g(x) = x - m(e^{x} - 4x^{2})$.

    - Determinaţi m astfel ca procesul să fie convergent.
    - Găsiţi valoarea lui *m* pentru care iteraţia converge cel mai rapid.

APLICAŢIA Nr. 9 / I

Consideraţi ecuaţia $x = g(x)$, unde

$g(x) = 1.57 + 0.99\cos(x)$

În metoda punctului fix:

1) Iteraţi în simplă precizie cu $x_0 = 1.5$, toleranţa $XTOL = 10^{-6}$, şi numărul limită de iteraţii $NLIM \geq 1000$. Comentaţi rezultatul.

2) Repetaţi iterarea în dublă precizie şi găsiţi rădăcina cu toleranţa $XTOL = 10^{-9}$.

APLICAŢIA Nr. 10 / I

Se dă polinomul LEGENDRE de ordinul 6:

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

1) Găsiţi aproximaţii iniţiale ale rădăcinilor (algebric, grafic, etc.)

2) Calculaţi rădăcinile, cu toleranţa 10^{-6}.

3) Studiați <u>stabilitatea</u> rădăcinii pozitive mai mare.

Notă: Toate rădăcinile sunt de modul < 1.

APLICAŢIA Nr. 11 / I

Polinomul

$$p(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

are rădăcinile: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ \ldots;\ x_5 = 5$.

Fie $\tilde{p}(x)$ polinomul obţinut din $p(x)$ înlocuind coeficientul $a_4 = -15$ a lui x^4,

cu $\tilde{a}_4 = -15.003$.

- Calculaţi rădăcinile lui $\tilde{p}(x)$.
- Calculaţi modulul raportului: $\dfrac{\text{perturbația relativă a rădăcinii } x_5}{\text{perturbația relativă a coeficientului } a_4}$

  Comentaţi rezultatul.

  (Dacă *a* perturbat devine $\tilde{a}$, perturbaţia relativă este: $(\tilde{a} - a)/a$.)

APLICAŢIA Nr. 12 / I

Consideraţi polinomul

$$p(x) = x^4 - 5.3x^3 + 10.23x^2 - 8.591x + 2.662$$

- Studiați existența unei rădăcini multiple.
- Calculaţi rădăcinile, în precizie <u>cvadruplă</u> (IVF), sau precizie <u>dublă</u> (CVF).

APLICAŢIA Nr. 13 / I

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} xy - z^2 = 2 \\ -xyz - x^2 + y^2 = 4 \\ e^x - e^y - z = 7 \end{cases}$$

Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$

1) Cu aproximaţia iniţială $w_0 = (1, 1, 1)$

2) Cu aproximaţia iniţială $w_0 = (2, 2, -1)$

Comparaţi numărul de iteraţii şi explicaţi.

APLICAŢIA Nr. 14 / I

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x + y} = 1 \\ x + y - e^{x-y} = 3 \end{cases}$$

- Găsiți o aproximație inițială (x_0, y_0),
- Rezolvaţi cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$, prin:
  - (a) iterare cu matricea constantă A (cu actualizare la 3 paşi);
  - (b) metoda Newton.

APLICAŢIA Nr. 15 / I

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + x - y^2 = 1 \\ y - \sin(x)^2 = 0 \end{cases}$$

Găsiți două aproximații inițiale $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}), \quad i = 1,2$.

Rezolvaţi, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$ prin:

1) Metoda NEWTON;

2) Iterare cu matricea constantă A (cu actualizare la 3 paşi).

APLICAŢIA Nr. 16 / I

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 3y^2 = 21 \\ x^2 + 2y = -2 \end{cases}$$

Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$. Găsiţi aproximaţiile iniţiale (x_0, y_0) din intersecţia graficelor celor două curbe.

APLICAŢIA Nr. 17 / I

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6.4 \\ xyz = -2.2 \\ x + y - z^2 = 2.4 \end{cases}$$

- Găsiți o aproximație inițială $w_0 = (x_0, y_0, z_0)$, pentru $z_0 \approx -1$;
- Găsiți soluția în vecinătatea lui w_0, prin metoda NEWTON, cu jacobianul exact (analitic); luați toleranța $EPS = 10^{-6}$.

APLICAŢIA Nr. 18 / I

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x + y} = 1 \\ x + y - e^{x-y} = 3 \end{cases}$$

- Găsiți o aproximaţie iniţială $w_0 = (x_0, y_0)$;
- Rezolvaţi prin iterare cu matricea constantă *A* (cu actualizare la 3 paşi), cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

APLICAŢIA No. 19 / I

Se dă sistemul:

$$\begin{cases} \sin(\pi xy) - 0.5y - x = 0 \\ (1-0.25/\pi)(e^{2x-1}-1) + y - 2x = 0 \end{cases}$$

Găsiți cele două soluții ale sistemului în domeniul $x \in [0.25, 1]$, $y \in [0.5, 2]$, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$.

APLICAŢIA Nr. 20 / I

Se dă sistemul liniar cu matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3.01 & 6.03 & 1.99 \\ 1.27 & 4.16 & -1.23 \\ .987 & -4.81 & 9.34 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi soluţia pentru termenul liber $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
2) Repetaţi punctul 1 cu matricea A' obţinută prin înlocuirile: $3.01 \to 3.00$ (element $(1,1)$) şi $.987 \to .990$ (element $(3,1)$). Comparaţi rezultatele şi explicaţi.

APLICAŢIA Nr. 21 / I

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3.01 & 6.03 & 1.99 \\ 1.27 & 4.16 & -1.23 \\ .987 & -4.81 & 9.34 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi matricea inversă A^{-1}.

2) Calculaţi <u>manual</u> numerele de condiţie $cond(A)_1$ şi $cond(A)_\infty$.

3) Stabiliți dacă matricea este bine sau rău condiţionată.

APLICAŢIA Nr. 22 / I

Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.501 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.501 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \end{bmatrix}$$

1) Calculați inversa A^{-1};

2) Stabiliți dacă matricea A este bine sau rău condiționată.

APLICAŢIA Nr. 23 / I

Se dă matricea HILBERT de ordinul 5:

$$H_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix};$$

1) Rezolvaţi sistemul liniar $H_5 x = b$, pentru:

$b = [1.0 \quad 0.6 \quad 0.4 \quad 0.3 \quad 0.3]^T$, şi $\tilde{b} = [1.02 \quad 0.6 \quad 0.4 \quad 0.3 \quad 0.3]^T$.

2) Stabiliţi raportul: $\dfrac{\text{perturbația relativă (în modul) în soluție}}{\text{perturbația relativă în termenul liber } b_1}$

Comentaţi rezultatul

APLICAŢIA Nr. 24 / I

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 5 & 1 & -1 & 0 \\ & & 4 & 1 & -1 \\ & \mathit{Simetric} & & 5 & 1 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right]$$

Matricea *A* este pozitiv definită.

1) Rezolvaţi sistemul prin metoda CHOLESKY.

2) Afişaţi matricea *S* (sau *L*), şi calculaţi determinantul matricii *A*.

3) Modificați elementele (1,2) și (2,1), din 1 în 4.1. Rezolvați sistemul.

APLICAŢIA Nr. 25 / I

Se dă sistemul liniar $Ax = b$, unde:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 2 & 28 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 26 \end{array}\right]$$

1) Încercați să rezolvaţi sistemul prin metoda CHOLESKY. Nu este posibil. De ce?
2) Rezolvați sistemul prin altă metodă.
3) Calculaţi și determinantul matricii *A*.

APLICAŢIA Nr. 26 / I

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & -4 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi numărul de condiţie $cond(A)_1$.
2) Calculaţi <u>manual</u> numărul de condiţie $cond(A)_*$.

   (Folosiți un program numai pentru rădăcinile unui polinom.)

APLICAŢIA Nr. 27 / I

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.301 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.301 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Calculaţi <u>manual</u> numărul de condiţie $cond(A)_*$.

  (Folosiți un program numai pentru rădăcinile unui polinom.)

- Este matricea bine sau rău-condiţionată ?

APLICAŢIA Nr. 28 / I

Se dă matricea HILBERT de ordinul 3:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $h_{ij} = 1./(i + j - 1)$.

1) Calculaţi H_3^{-1} în simplă precizie.

2) Calculaţi H_3^{-1} în dublă precizie.

3) Calculaţi în simplă precizie inversa *analitică* $\left(H_3^{-1}\right)_T = [\alpha_{ij}]$, unde:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(n+i-1)!(n+j-1)!}{(i+j-1)[(i-1)!(j-1)!]^2(n-i)!(n-j)!}$$

Comparaţi elementele inverselor de la punctele 1 şi 2, cu cele de la punctul 3.

Explicaţi rezultatele comparaţiei.

APLICAŢIA Nr. 29 / I

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 5:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 & 1./8 \\ 1./5 & 1./6 & 1./7 & 1./8 & 1./9 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1; \quad a_{ij} = 1./(i + j - 1) \ldots i > 1; \quad j = \overline{1,5}$.

1) Calculaţi A_5^{-1} în simplă precizie, introducând elementele lui A_5 în două moduri:
   a) Valorile elementelor a_{ij}, rotunjite la 7 cifre semnificative;
   b) a_{ij} = Numitorii elementelor din liniile 2...5, și apoi, inversând a_{ij} prin program (prin cod).
2) Comparaţi elementele inverselor de la punctele a) şi b). Explicaţi de ce apar diferențe.

Notă: Elementele inversei exacte se cunosc analitic, și sunt numere intregi ■

APLICAŢIA Nr. 30 / I

Se dă matricea *A* de ordinul 5, cu elementele (Wilkinson 5 – modificat):

$a_{ij} = 18.144/(i + j + 1), \quad i, j = \overline{1,5}$

Lucrând în simplă precizie, se cere:

1) Tipăriți matricea *A*;
2) Calculați inversa A^{-1};
3) Este matricea bine sau rău condiționată?

APLICAŢIA Nr. 31 / I

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 5, cu elementele reprezentate cu 6 cifre semnificative corecte:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 & 1.00000 \\ 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 \\ 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125000 \\ 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125000 & 0.111111 \end{bmatrix}$$

(Valorile exacte ale elementelor: $a_{1j} = 1; \quad a_{ij} = 1./(i+j-1) \ldots i > 1; \quad j = \overline{1,5}$)

1) Rezolvați sistemul $A_5 x = b$, alegând termenii b liberi după voie.
2) Fie $\tilde{A}_5$ matricea obținută din A_5, înlocuind elementul $a_{22} = 0.333333$, cu $\tilde{a}_{22} = 0.333000$ (restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}_5 x = b$.
3) Comparați soluțiile. Este matricea A_5 bine sau rău condiționată ?
4) Calculați și determinanții matricilor A_5 și $\tilde{A}_5$.

APLICAŢIA Nr. 32 / I

Se dă matricea CAUCHY de ordinul 5 (cu elementele reprezentate cu 7 cifre semnificative):

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0.3333333 & 0.2000000 & 0.1428571 & 0.09090909 & 0.1000000 \\ 0.2000000 & 0.1428571 & 0.1111111 & 0.07692307 & 0.08333333 \\ 0.1428571 & 0.1111111 & 0.09090909 & 0.06666667 & 0.07142857 \\ 0.1000000 & 0.08333333 & 0.07142957 & 0.05555556 & 0.05882353 \\ 0.1111111 & 0.09090909 & 0.07692307 & 0.05882353 & 0.06250000 \end{bmatrix}$$

1) Calculați inversa A_5^{-1}.
2) Este matricea A_5 bine sau rău condiționată ?
3) Calculați și determinantul matricii A_5.

<u>Notă:</u> Gauss/LU: Modificați pragul (data `prag`) în `Main-Elim` (sau `LU-Decomp`) la `1E-8` !