**APLICAŢIA Nr. 1 / II**

Următoarele date numerice sunt reprezentate în formatul dublu:

$x = 1E308$;  $x = 5E308$;

$x = 5E-308$;  $x = 1E-308$;  $x = 1E-325$;

Să se găsească următorii parametri ai reprezentării:

- Exponentul cu deplasare (sau exponentul stocat); Exponent.
- Semnifcandul (*sig*), și fracția în model (*fr*). Pentru o dată numerică finită avem $sig = 2 * fr$ . De ce ?

**APLICAŢIA Nr. 2 / II**

Pentru următoarele numere:

$x = 1.0$;  $x = 3.0 \times 10^{17}$

1) Calculați: $ULP(x)$, $x_1 = x + ULP(x)$, and $x_2 = x + \frac{1}{2} ULP(x)$.

   Verificați dacă $x_2 = x$ sau $x_2 > x$.

2) Găsiți numerele în virgulă flotantă cele mai apropiate de *x*, anume:

   $X^-$ = cel mai apropiat și mai mic decât *x*;

   $X^+$ = cel mai apropiat și mai mare decât *x*.

   Calculați diferențele: $x - X^-$ and $X^+ - x$, și exprimați-le ca un multiplu (sau fracțiune) al $ULP(x)$.

## APLICAŢIA Nr. 3 / II

Calculaţi valorile următoarelor funcţii, pentru valorile $x = 10^i, \quad i = 1, 2, \ldots, 7$.

$f(x) = \dfrac{x}{10}(\sqrt{x+40} - \sqrt{x+10})$ - în simplă precizie;

$f2(x) = \dfrac{x}{10}(\sqrt{x+40} - \sqrt{x+10})$ - în dublă precizie;

$g(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x+40} + \sqrt{x+10}}$ - în simplă precizie,

- Tabelaţi valorile calculate astfel: $f2(x)$ cu 8 cifre semnificative corecte: $f(x)$ și $g(x)$, cu 7 cifre semnificative. Explicaţi rezultatele.
- Stabiliţi numarul de cifre semnificative corecte ale valorii $f(x)$ pentru $x = 10^4$, considerând valorile $f2(x)$ ca valori exacte.

## APLICAŢIA Nr. 4 / II

Ecuaţia $f(x) = e^x - 3.7x^{2/3} = 0$ are trei rădăcini.

Fie $x_0$ o aproximație a rădăcinii. Găsiți cele trei rădăcini, cu toleranţa $XTOL = 10^{-6}$, prin:

1) Metoda Secantei: cu aproximațiile $x_0 \pm h$, unde $0 < h \le x_0/10$.

2) Metoda Newton: aproximație $x_0$.

3) O metodă de ordinul 3: aproximație $x_0$.

Comparați numărul de iterații.

## APLICAŢIA Nr. 5 / II

Ecuaţia $f(x) = e^x - 5x^2 = 0$ are trei rădăcini.

1) Găsiți aproximații ale rădăcinilor.

2) Pentru rădăcina <u>pozitivă mai mare</u>, iterați în metoda punctului fix, astfel:

   a) Puneți ecuația sub forma $x = g(x)$, $g(x) = e^{x/2} / \sqrt{5}$. Iterația nu converge către rădăcină căutată. De ce?

   b) Aplicați o procedură explicită de punct fix, astfel ca iterația să conveargă, și găsiți rădăcina cu toleranța minimă $XTOL_{\min}$.

## APLICAŢIA Nr. 6 / II

Se dă ecuaţia $f(x) = 0$, unde:

$f(x) = 0.99\cos(x) - x + 1.57$

1) Rezolvaţi ecuaţia cu metoda NEWTON, luând toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

2) Rezolvaţi ecuaţia cu metoda SECANTEI, cu $EPS = 10^{-6}$.

3) Comparaţi numărul de iteraţii în cele două metode.

## APLICAŢIA Nr. 7 / II

Se dă ecuaţia:

$$tg(x) = \frac{8-x}{x+0.2}$$

Găsiți rădăcina în jurul valorii $x_0 = 4.$, cu toleranţa minimă $EPS_{\min}$ :

1) Cu metoda NEWTON;

2) Cu metoda SECANTEI;

Comparaţi numărul de iteraţii în cele două metode.

## APLICAŢIA Nr. 8 / II

Se dă funcţia

$$f(x) = 1 + x + e^{-px^2}\sin(x),$$

unde $p$ este un parametru.

1) Găsiţi rădăcina din $(0,1)$ pentru valorile $p = 5; \quad 30$, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

2) Rezolvaţi cu metoda Newton cazul $p = 30$, cu $EPS = 10^{-6}$ şi $x_0 = 0$.

   Comentaţi rezultatul.

## APLICAŢIA Nr. 9 / II

Se dă ecuaţia $f(x) = 0$, unde:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2\sin x - x + 0.94$$

Găsiți cele două rădăcini din intervalul [7, 9], cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$:

1) cu metoda NEWTON – cu aproximația $x_0$;

2) cu metoda SECANTEI – cu aproximații apropiate de $x_0$.

Comparaţi numărul de iteraţii în cele două metode

## APLICAŢIA Nr. 10 / II

Consideraţi ecuaţia $x = g(x)$, unde

$$g(x) = \frac{2.16 + 0.253tg(x)}{1 + tg(x)}$$

1) Iteraţi în simplă precizie cu $x_0 = 1.$, toleranţa $EPS = 10^{-6}$, şi numărul limită de iteraţii $NLIM \geq 2000$. Comentaţi rezultatul.

2) Repetaţi iterarea în dublă precizie şi găsiţi rădăcina cu toleranţa $EPS = 10^{-9}$.

3) Explicați de ce este nevoie de un număr foarte mare de iterații, până la verificarea unui test de oprire a iterației.

## APLICAŢIA Nr. 11 / II

Se dă funcţia:

$$Q(\alpha) = C\frac{(\pi + 2\alpha + \sin 2\alpha)^{\frac{5}{3}}}{(\pi + 2\alpha)^{\frac{2}{3}}}; \quad 0 \le \alpha \le \pi/2.$$

Găsiţi $\alpha$ pentru care $Q(\alpha)$ <u>este maxim</u>, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$.

[Ecuaţia lui Manning: $Q(\alpha)$ reprezintă fluxul (debitul volumic) printr-o conductă circulară rugoasă. $\alpha$ defineşte gradul de umplere a conductei: perimetrul udat este arcul corespunzător lui $\pi + 2\alpha$ (radiani). *C* este un coeficient depinzând de raza, coeficientul de rugozitate şi panta conductei.]

## APLICAŢIA Nr. 12 / II

Se dă polinomul LAGUERRE de ordinul 5:

$$L_5(x) = \frac{1}{120}(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120)$$

1) Găsiţi aproximaţii iniţiale ale rădăcinilor (algebric, grafic, etc.)
2) Calculaţi rădăcinile, cu toleranţa $10^{-6}$.
3) Modificați coeficientul lui $x^4$, din +25 în +26. Recalculați rădăcinile și comentați rezultatul.

## APLICAŢIA Nr. 13 / II

Polinomul

$$p(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$$

are rădăcinile: $x_1 = 1; x_2 = 2; \ldots; x_6 = 6$.

Fie $\tilde{p}(x)$ polinomul obţinut din $p(x)$ înlocuind coeficientul $a_5 = -21$ a lui $x^5$, cu $\tilde{a}_5 = -21.003$.

- Calculaţi rădăcinile lui $\tilde{p}(x)$.
- Calculaţi modulul raportului: $\dfrac{\text{perturbația relativă a rădăcinii } x_6}{\text{perturbația relativă a coeficientului } a_5}$
- Comentaţi rezultatul.

  (Dacă $a$ perturbat devine $\tilde{a}$, perturbaţia relativă este: $(\tilde{a} - a)/a$.)

## APLICAŢIA Nr. 14 / II

Consideraţi polinomul

$$p(x) = x^3 - 5.56x^2 + 9.1389x - 4.68999$$

- Studiați existența unei rădăcini multiple.
- Calculaţi rădăcinile, în precizie <u>cvadruplă</u> (IVF), sau precizie <u>dublă</u> (CVF).

## APLICAŢIA Nr. 15 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} y^2 + y - x^2 = 1 \\ x - \sin(y)^2 = 0 \end{cases}$$

1) Găsiți două aproximații inițiale $(x_0, y_0)$, unde $x_0 \in (0,1)$.

2) Rezolvaţi, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$,

    - prin metoda NEWTON;
    - prin iterare cu matricea constantă A (cu actualizare la 3 paşi).

## APLICAŢIA Nr. 16 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x^3 + 4y^2 = 80 \\ x^2 + 4y = -4 \end{cases}$$

1) Găsiţi aproximaţiile iniţiale $x_0, y_0$ din intersecţia graficelor celor două curbe.

2) Rezolvaţi prin metoda NEWTON – cu jacobianul exact, cu toleranţa

   $EPS = 10^{-6}$.

3) Rezolvaţi prin metoda NEWTON – cu jacobianul calculat numeric.

## APLICAŢIA Nr. 17 / II

Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} xy - z^2 = 2 \\ -xyz - x^2 + y^2 = 4 \\ e^x - e^y - z = 7 \end{cases}$$

Rezolvaţi prin metoda NEWTON, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$

1) Cu aproximaţia iniţială $w_0 = (1, 1, 1)$

2) Cu aproximaţia iniţială $w_0 = (2, 2, -1)$

Comparaţi numărul de iteraţii şi explicaţi.

## APLICAŢIA Nr. 18 / II

Se consideră sistemul (Vahidi 2012):

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - 0.5 = 0 \\ x_1^{\ 2} - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + (10\pi - 3)/3 = 0 \end{cases}$$

1) Găsiți o aproxiamție inițială $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, știind că $x_2$ are o valoare mică;

2) Rezolvați prin metoda NEWTON, cu toleranța $EPS = 10^{-6}$.

## APLICAŢIA Nr. 19 / II

Se dă sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} t\cos\alpha + t = 1 \\ t\sin\alpha - 0.1t^2 - e^{-t} = 1 \end{cases}$$

Rezolvaţi sistemul, cu toleranţa $EPS = 10^{-6}$ şi aproximaţia iniţială $w_0 = (x_0, y_0)$,

unde $x_0 \in (0,1)$, prin:

1) Iterare cu matricea constantă *A* (cu actualizare la 3 paşi)

2) Metoda NEWTON.

## APLICAŢIA Nr. 20 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 3.02 & -1.05 & 2.53 \\ 4.33 & 0.56 & -1.78 \\ -0.83 & -0.54 & 1.47 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi matricea inversă $A^{-1}$.

2) Calculaţi <u>manual</u> numerele de condiţie $cond(A)_\infty$ și $cond(A)_1$.

3) Stabiliți dacă matricea este bine sau rău condiționată.

## APLICAŢIA Nr. 21 / II

Stabiliţi dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.601 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 \\ 0.601 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

este bine sau rău condiţionată.

## APLICAŢIA Nr. 22 / II

Se dă matricea HILBERT de ordinul 4:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix};$$ Elementele matricii sunt: $h_{ij} = 1./(i + j - 1)$.

1) Calculaţi $H_4^{-1}$ în simplă precizie.
2) Calculaţi $H_4^{-1}$ în dublă precizie.
3) Comparaţi elementele inverselor de la punctele 1 şi 2. Explicaţi rezultatul comparaţiei.

## APLICAŢIA Nr. 23 / II

Se dă matricea:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4.002 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4.002 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix};$$

1) Rezolvaţi sistemul liniar $Ax=b$, unde:

   $b=[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$, şi $\tilde{b}=[1.02 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$.

2) Stabiliţi raportul: $\dfrac{\text{perturbația relativă (în modul) în soluție}}{\text{perturbația relativă în termenul liber } b_1}$

Comentaţi rezultatul.

## APLICAŢIA Nr. 24 / II

Se dă sistemul liniar $Ax=b$, unde:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b=\left[\begin{array}{c:c} 1 & 0.8 \\ 1 & 0.9 \\ 1 & 1. \\ 1 & 0.9 \\ 1 & 0.8 \end{array}\right]$$

Matricea *A* este pozitiv definită.

1) Rezolvaţi sistemul prin metoda CHOLESKY.

2) Afişaţi matricea *S* (sau *L*), şi calculaţi determinantul matricii *A*.

3) Modificați elementele (1,2) și (2,1), din 1 în 6.2. Rezolvați sistemul.

## APLICAŢIA Nr. 25 / II

Se dă matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -36 & 12 \\ -36 & 218 & -74 \\ 12 & -74 & 64 \end{bmatrix}$$

1) Calculaţi numărul de condiţie $cond(A)_1$.

2) Calculaţi <u>manual</u> numărul de condiţie $cond(A)_*$.

   (Folosiți un program numai pentru rădăcinile unui polinom.)

## APLICAŢIA Nr. 26 / II

Se dă matricea $A$ (Moler):

```
1    2    2    2    2
2    5    6    6    6
2    6    9    10   10
2    6    10   13   14
2    6    10   14   17
```

- Calculaţi inversa $A^{-1}$.

- Calculaţi <u>manual</u> numerele de condiţie $cond(A)_\infty$ și $cond(A)_1$.

  Folosiți un program numai pentru verificare.

- Este matricea bine sau rău-condiţionată ?

## APLICAŢIA Nr. 27 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1;\quad a_{ij} = 1./(i+j-1)\ldots i > 1;\quad j = \overline{1,4}$.

1) Calculaţi $A_4^{-1}$ în simplă precizie, introducând elementele lui $A_4$ în două moduri:
   a) Valorile elementelor $a_{ij}$, rotunjite la 7 cifre semnificative;
   b) Elementele $a_{ij}$ = numitorii din liniile 2...4, și apoi, inversând prin program (prin cod), aceste elemente.
2) Comparaţi elementele inverselor de la punctele a) şi b). Explicaţi de ce apar diferențe.

*Notă*: Elementele inversei exacte se cunosc analitic, și sunt numere intregi ■

## APLICAŢIA Nr. 28 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1./2 & 1./3 & 1./4 & 1./5 \\ 1./3 & 1./4 & 1./5 & 1./6 \\ 1./4 & 1./5 & 1./6 & 1./7 \end{bmatrix};$$

Elementele matricii sunt: $a_{1j} = 1;\quad a_{ij} = 1./(i+j-1)\ldots i > 1;\quad j = \overline{1,4}$.

1) Calculaţi numerele de condiție $cond(A_4)_\infty$ și $cond(A_4)_1$, în simplă precizie, introducând elementele lui $A_4$ în două moduri:
   a) Valorile calculate cu 7 cifre semnificative corecte;
   b) Inversând prin program (prin cod), elementele din liniile 2...4.
2) Comparaţi rezultatele de la punctele a) şi b). Explicaţi de ce sunt diferite.

## APLICAŢIA Nr. 29 / II

Se dă matricea LOTKIN de ordinul 4, cu elementele reprezentate cu 6 cifre semnificative corecte:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 & 1.000000 \\ 0.500000 & 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 \\ 0.333333 & 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 \\ 0.250000 & 0.200000 & 0.166667 & 0.142857 \end{bmatrix}$$

(Valorile exacte ale elementelor sunt:

$a_{1j} = 1; \quad a_{ij} = 1./(i + j - 1) \ldots i > 1; \quad j = \overline{1,4}$)

1) Rezolvați sistemul $A_4 x = b$, alegând termenii $b$ liberi după voie.
2) Fie $\tilde{A}_4$ matricea obținută din $A_4$, înlocuind elementul $a_{22} = 0.333333$, cu $\tilde{a}_{22} = 0.333000$ (restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}_4 x = b$.
3) Comparați soluțiile. Este matricea $A_4$ bine sau rău condiționată ?
4) Calculați și determinanții celor două matrici.

## APLICAŢIA Nr. 30 / II

Se dă matricea $A$, $4 \times 4$, cu următoarele elemente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.715 | 5.280 | 3.795 | 0.210 |
| 0.495 | 4.840 | 4.335 | 0.330 |
| 0.330 | 4.335 | 4.840 | 0.495 |
| 0.210 | 3.795 | 5.280 | 0.715 |

1) Calculați inversa $A^{-1}$.
2) Calculați <u>manual</u> numerele de condiție $cond(A)_\infty$ și $cond(A)_1$.
3) Este $A$ bine sau rău-condiționată?

## APLICAŢIA Nr. 31 / II

Se dă matricea CAUCHY de ordinul 5:

$$A=\begin{bmatrix} 0.333333 & 0.200000 & 0.142857 & 0.090909 & 0.100000 \\ 0.200000 & 0.142857 & 0.111111 & 0.076923 & 0.083333 \\ 0.142857 & 0.111111 & 0.090909 & 0.066667 & 0.071429 \\ 0.100000 & 0.083333 & 0.071429 & 0.055556 & 0.058824 \\ 0.111111 & 0.090909 & 0.076923 & 0.058824 & 0.062500 \end{bmatrix}$$

1) Rezolvați sistemul $Ax=b$, alegând termenii $b$ liberi după voie.
2) Fie $\tilde{A}$ matricea obținută din $A$, înlocuind elementul $a_{11}=0.333333$, cu $\tilde{a}_{11}=0.333000$ (restul elementelor rămân nemodificate). Rezolvați sistemul $\tilde{A}x=b$.
3) Comparați soluțiile. Este matricea $A$ bine sau rău condiționată ?
4) Calculați și determinanții celor două matrici.

Notă: Gauss/LU: Modificați pragul (data `prag`) în `Main-Elim` (sau `LU-Decomp`) la 1E-8 !

## APLICAŢIA Nr. 32 / II

Considerați matricea:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Lucrând în simplă precizie, cu un `prag` $\le$ `1E-7` în Gauss sau LU:

1) Calculați inversa $A^{-1}$;
2) Fie $\tilde{A}$ matricea obținută din $A$, prin înlocuirea elementului $a_{44}=4$ cu $\tilde{a}_{44}=4.0001$. Calculați inversa $\tilde{A}^{-1}$.
3) Comparați eroarea la verificarea soluției – de la punctele 1) și 2), și explicați.