

CURS 4

METODE NUMERICE PENTRU PROBLEMA DE VALORI PROPRII

Partea I

1. Definiții, proprietăți.
2. Metoda puterii și variante ale acesteia. Metoda iterațiilor simultane.
3. Metoda Jacobi.

1 Valori și vectori proprii**1.1 Valori și vectori proprii. Polinom caracteristic. Subspațiu propriu.**

Fie dată matricea \mathbf{A} $n \times n$, reală sau complexă.

Definiție

Dacă vectorul $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ și scalarul λ satisfac relația

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}, \quad (1)$$

atunci: λ se numește *valoare proprie*, iar \mathbf{x} *vectorul propriu* asociat lui λ ■

Dacă \mathbf{x} și \mathbf{y} sunt asociați cu λ , atunci și $\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}$, α, β scalari, este asociat lui λ .

Dacă \mathbf{P} este o matrice $n \times n$ nesingulară, matricea

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$$

se zice *similară* cu \mathbf{A} . \mathbf{P} se zice matrice de transformare.

Propoziție

- Matricile similare au aceleași valori proprii.
- Dacă \mathbf{x}' sunt vectorii proprii ai lui \mathbf{A}' , vectorii proprii \mathbf{x} ai lui \mathbf{A} se găsesc din relația $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}'$ ■

(Într-adevăr: dacă $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$, rezultă $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$, sau $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}) = \lambda (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{x})$; cu

$\mathbf{x}' = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}$, rezultă $\mathbf{A}' \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}'$.)

Mai multe metode numerice transformă matricea \mathbf{A} într-o matrice similară \mathbf{A}' , de o formă mai simplă, determinând valorile proprii și vectorii proprii ai matricii \mathbf{A}' ; apoi, se determină vectorii proprii ai lui \mathbf{A} , cu relația de mai sus.

Polinomul caracteristic

Relația (1) este ecuația din care se găsesc λ și \mathbf{x} . Aceasta se mai scrie

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2)$$

unde \mathbf{I} este matricea unitate. Explicit,

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2')$$

Condiția ca (2) să aibă soluții netriviiale \mathbf{x} , este $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Explicit,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$p(\lambda)$ se zice *polinomul caracteristic* al matricii \mathbf{A} , și $p(\lambda) = 0$ – ecuația caracteristică.

Fie determinantul dezvoltat:

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n \quad (3')$$

Din (3, 3') și relațiile între coeficienți și rădăcini, rezultă următoarele proprietăți ale coeficienților și valorilor proprii:

1) Avem $p(0) = c_n$, și din determinant $p(0) = \det(\mathbf{A})$; urmează

$$c_n = \det(\mathbf{A})$$

Pe de altă parte, $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = c_n$, și astfel $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det(\mathbf{A})$.

2) Coeficientul lui λ^{n-1} se găsește din termenul

$$(a_{11} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = (-\lambda)^n + \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right) (-\lambda)^{n-1} + \dots \text{ Astfel, rezultă:}$$

$$c_1 = (-1)^{n-1} \sum_1^n a_{ii} ; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_1^n a_{ii} .$$

$$(Tr(\mathbf{A}) = \sum_1^n a_{ii} \text{ se zice urma matricii } \mathbf{A}.)$$

3) În general:

$$c_i = (-1)^{n-i} \times \text{Suma minorilor principali de ordinul } i \text{ ai matricii } \mathbf{A}.$$

Observații

1) Ordonarea valorilor proprii:

Valorile proprii se ordonează în șirul $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. În acest șir, o rădăcină multiplă de ordinul r , se repetă de r ori. Uzual, valorile proprii se indexează în ordinea descrescătoare a modului, adică $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Valoarea proprie λ_1 se zice *dominantă*. Mulțimea valorilor proprii $\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$ se zice *spectrul* matricii \mathbf{A} .

2) Vectorii proprii asociați unei valori proprii:

După determinarea valorilor proprii, vectorii proprii asociați cu λ_i se găsesc punând $\lambda = \lambda_i$ în (2'), și rezolvând sistemul liniar și omogen (2').

- Dacă \mathbf{A} este reală: În general, λ_i poate fi complex, și atunci vectorul propriu \mathbf{x}_i asociat cu λ_i este complex. Dacă \mathbf{A} și λ_i sunt reali, atunci vectorul propriu \mathbf{x}_i este real.
- Dacă \mathbf{A} este complexă: În general, valorile proprii și vectorii proprii sunt mărimi complexe. În particular, unele dintre acestea pot fi și reale ■

Subspațiu propriu și dimensiunea acestuia

Sistemul (2') este omogen, astfel că dacă \mathbf{x}, \mathbf{y} sunt soluții, atunci $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ sunt soluții.

Adică, lui λ_i îi este asociat un subspațiu liniar S_i de soluții \mathbf{x} . Se arată că:

Dimensiunea subspațiului S_i este *mai mică decât sau egală cu* ordinul de multiplicitate a rădăcinii λ_i ■

Dacă r_i este ordinul de multiplicitate a rădăcinii λ_i și p_i dimensiunea lui S_i , avem $p_i \leq r_i$. Adică, în S_i există cel mult r_i vectori liniar independenți.

Dacă $p_i < r_i$, valoarea λ_i se zice *defectivă*; în acest caz, și matricea \mathbf{A} se zice *defectivă*.

(r_i se mai zice *multiplicitate algebrică*, iar p_i *multiplicitate geometrică*.)

3) Determinarea efectivă a sistemului propriu:

Pentru calculația practică ($n > 3$), *nu se recomandă*:

- *Calculul direct al valorilor proprii*, prin rezolvarea ecuației caracteristice (3').
Aceasta, datorită faptului că problema calculului rădăcinilor unui polinom este foarte sensibilă la mici perturbații în coeficienți (aceste perturbații apar din erorile de rotunjire).
- *Calculul direct al vectorilor proprii*, din sistemul (2').

Metode numerice pentru găsirea valorilor proprii λ_i , și a vectorilor proprii asociați $\mathbf{x}^{(i)}$, sunt prezentate în continuare.

■

Exemplu-1

Fie matricea:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Polinomul caracteristic este:

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ 3 & 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sau cf. (3')

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0,$$

unde:

$$c_3 = \det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 0$$

$$c_1 = (-1)^2(1 + 3 + 5) = 9$$

$$c_2 = (-1)^1 \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right) = -(-1 - 4 - 1) = 6$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

De unde:

$$\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 9\lambda - 6 = 0; \lambda = \frac{9 \pm \sqrt{105}}{2} = -0.623475383; 9.62347538$$

Ordonând (descrescător, după module):

$$\lambda_1 = 9.62347538$$

$$\lambda_2 = -0.623475383$$

$$\lambda_3 = 0$$

Vectorii proprii $\mathbf{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{bmatrix}$, $i = 1, 2, 3$ se determină din sistemul omogen

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ 3 & 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

în care se înlocuiește $\lambda = \lambda_i$.

De exemplu, vectorul propriu nr. 1 se găsește din sistemul:

$$\begin{bmatrix} -8.62347538 & 2 & 3 \\ 2 & -6.62347538 & 4 \\ 3 & 4 & -4.62347538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una dintre coordonate rămâne arbitrară: să alegem de ex., $x_1 = 1$, rezultă

$$2x_2 + 3x_3 = 8.62347538$$

$$4x_2 - 4.62347538x_3 = -3$$

Rezultă (rezolvând în simplă precizie):

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.452934 \\ 1.905869 \end{bmatrix}$$

Orice vector $\alpha \mathbf{x}^{(1)}$ unde $\alpha = \text{real}$, face funcție de vector propriu nr. 1.

Analog, se determină vectorii proprii nr. 2 și 3.

■

1.2 Matrici hermitiene și unitare

Operația * aplicată unui vector sau unei matrici notează *transpus-conjugata*. Astfel:

- Dacă \mathbf{x} este un vector, $\mathbf{x}^* = \overline{\mathbf{x}}^T$.
- Dacă \mathbf{A} , este o matrice, $\mathbf{A}^* = \overline{\mathbf{A}}^T$.

Explicit: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{A}^* = [a_{ij}^*]$, avem: $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$.

În expresiile anterioare, bara notează conjugata: $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x_i}]$; $\overline{\mathbf{A}} = [\overline{a_{ij}}]$.

Pentru un vector real, sau o matrice reală, operația * revine la transpunere:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^T; \quad \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T.$$

În particular, pentru un scalar, operația revine la conjugare: $s^* = \overline{s}$.

Matrici hermitiene:

Matricea \mathbf{A} se zice *hermitiană*, dacă $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ ■

Exemplu de matrice hermitiană:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1-7i & -i \\ 1+7i & 5 & 10-3i \\ i & 10+3i & -2 \end{bmatrix}$$

Remarcați că elementele diagonale sunt reale, iar elementele simetrice sunt conjugate ■

O matrice reală este hermitiană, dacă este simetrică ($\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$).

O matrice hermitiană se zice *pozitiv definită*, dacă $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x}$ este real) ■

În particular, o matrice reală și simetrică este pozitiv definită, dacă: $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$.

Matrici unitare:

Matricea \mathbf{U} se zice *unitară*, dacă $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}$, unde \mathbf{I} este matricea unitate;
echivalent, $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^*$ ■

O matrice *reală* este unitară dacă $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$, sau $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$.

Valorile proprii ale unei matrici unitare au modulul egal cu 1.

Exemplu de matrice unitară (reală):

Matricea de rotație a axelor în plan este unitară:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Într-adevăr, avem $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, și se verifică imediat că $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

■

Proprietăți ale matricilor hermitiene (în particular, reale și simetrice):

P1. Dacă \mathbf{A} este hermitiană, și are valorile proprii $\{\lambda_i\}$ distincte sau nu, atunci:

(a) Există o matrice unitară \mathbf{U} , astfel că $\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U}$ este diagonală:

$$\mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

(se zice că \mathbf{U} diagonalizează pe \mathbf{A} .)

(b) Există n vectorii proprii liniar independenți care formează o bază ortonormată în \mathbf{C}^n (aceștia sunt coloanele lui \mathbf{U});

(c) Valorile proprii sunt *reale* ■

În particular, pentru \mathbf{A} reală și simetrică:

(a-1) Există \mathbf{U} unitară și reală, astfel că $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

(b-1) Există n vectorii proprii liniar independenți; aceștia formează o bază

ortonormată în \mathbf{R}^n (coloanele lui \mathbf{U});

(c-1) Valorile proprii sunt *reale*, și vectorii proprii sunt reali ■

Avem și proprietatea:

P1'. Dacă \mathbf{A} este hermitiană (reală și simetrică) și pozitiv definită, atunci valorile proprii ale lui \mathbf{A} sunt *reale și pozitive* ■

1.3 Produs scalar și proprietăți de ortogonalitate

1.3.1 Spațiu vectorial real V_n

Fie x un vector din V_n , și \mathbf{x} matricea coloană a coordonatelor sale într-o bază a lui V_n ($x_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}$).

Dacă matricea \mathbf{A} reală, este *simetrică și pozitiv definită*, se definește produsul scalar în raport cu matricea \mathbf{A} , prin:

$$\langle x, y \rangle_A = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

În particular, pentru $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, acesta devine produsul scalar standard:

$$\langle x, y \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$$

Avem: $\langle y, x \rangle_A = \langle x, y \rangle_A$; $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.

Vectorii x și y se zic *ortogonali* (relativ la produsul scalar), dacă $\langle x, y \rangle_A = 0$, sau $\langle x, y \rangle = 0$ ■

Astfel:

- Vectorii x și y sunt *ortogonali relativ la matricea \mathbf{A}* , dacă

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = 0, \text{ sau } \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0.$$

- Vectorii sunt *ortogonali*, dacă $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$, sau $\mathbf{y}^T \mathbf{x} = 0$.

■

1.3.2 Spațiu vectorial complex V_n

Fie x un vector din V_n , și \mathbf{x} matricea coloană a coordonatelor într-o bază a lui V_n ($x_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, n}$).

Dacă \mathbf{A} este o matrice *hermitiană și pozitiv definită*, se definește produsul scalar în raport cu matricea \mathbf{A} , prin:

$$\langle x, y \rangle_A = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^* \mathbf{A}^T \mathbf{x}.$$

(Ultima egalitate rezultă din aceea că scalarul $s = \langle x, y \rangle_A$ este egal cu transpusul său).

Produsul scalar definit de $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ este:

$$\langle x, y \rangle = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$$

Avem: $\langle y, x \rangle_A = \overline{\langle x, y \rangle_A}$, și $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Ortogonalitatea a doi vectori se definește ca înainte, prin condiția $\langle x, y \rangle_A = 0$, sau $\langle x, y \rangle = 0$ ■

Observație: Dacă avem $\langle x, y \rangle_A = 0$, avem și $\langle y, x \rangle_A = 0$ ■

Astfel:

- Vectorii \mathbf{x}, \mathbf{y} sunt *ortogonali în raport cu \mathbf{A}* , dacă:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{y}} = 0, \text{ sau } \mathbf{y}^* \mathbf{A}^T \mathbf{x} = 0.$$

- Vectorii \mathbf{x}, \mathbf{y} sunt *ortogonali*, dacă:

$$\mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}} = 0, \text{ sau } \mathbf{y}^* \mathbf{x} = 0.$$

P2. Dacă \mathbf{A} este hermitiană, atunci:

- Vectorii proprii asociați la două valori proprii distincte sunt *ortogonali*:

$$\text{dacă } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ atunci } \mathbf{x}_2^* \mathbf{x}_1 = 0 \text{ și } \mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_2 = 0.$$

- Avem și: $\mathbf{x}_2^* \mathbf{A} \mathbf{x}_1 = 0, \mathbf{x}_1^* \mathbf{A} \mathbf{x}_2 = 0$.

(Dacă \mathbf{A} hermitiană este și pozitiv definită, vectorii $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sunt *ortogonali* relativ la matricea \mathbf{A}^T .)

■

Dacă \mathbf{A} este reală și simetrică:

- Vectorii proprii asociați la două valori proprii *distincte* sunt *ortogonali*:

$$\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 = 0, \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 = 0.$$

- Avem și: $\mathbf{x}_2^T \mathbf{A} \mathbf{x}_1 = 0, \mathbf{x}_1^T \mathbf{A} \mathbf{x}_2 = 0$.

(Dacă \mathbf{A} reală și simetrică, este și pozitiv definită, vectorii $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sunt *ortogonali* relativ la matricea \mathbf{A})

■

1.4 Câtul Rayleigh

Fie \mathbf{A} o matrice $n \times n$ complexă (sau reală). Fie $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^n$ un vector arbitrar, și definim

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^* \mathbf{v}}$$

$\rho(\mathbf{v})$ se numește *câtul Rayleigh*.

Proprietate-1:

Dacă \mathbf{x} este vector propriu asociat cu λ , atunci $\rho(\mathbf{x}) = \lambda$ ■

Astfel, câtul Rayleigh poate fi utilizat pentru a găsi o aproximare a valorii proprii λ , dacă se cunoaște o aproximare \mathbf{v} a vectorului propriu \mathbf{x} : $\mathbf{v} \approx \mathbf{x} \Rightarrow \lambda \approx \rho(\mathbf{v})$.

Proprietate-2:

Dacă matricea este hermitiană, câtul Rayleigh este mărginit de valorile proprii extreme ■

Valorile proprii sunt reale; fie acestea $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, atunci, avem:

$$\lambda_n \leq \rho(\mathbf{v}) \leq \lambda_1, \text{ pentru orice } \mathbf{v} \in \mathbf{C}^n.$$

2 Metoda puterii

2.1 Metoda puterii

Metoda puterii determină valoarea proprie dominantă și vectorul propriu asociat, ale unei matrici \mathbf{A} , reale sau complexe.

Aplicată la inversa \mathbf{A}^{-1} metoda determină valoarea proprie cea mai mică (în modul), și vectorul propriu asociat cu aceasta. Aceasta, conform proprietății:

Matricea \mathbf{A}^{-1} are ca valori proprii inversele valorilor proprii ale lui \mathbf{A} și aceiași vectori proprii.

Într-adevăr: din $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, înmulțind la stânga cu \mathbf{A}^{-1} , rezultă $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, sau

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$. Explicit: $\mathbf{A} : \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; $\mathbf{A}^{-1} : \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$. Avem:

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_1}, \dots, \lambda_1 = \frac{1}{\mu_n}.$$

■

Ipotezele metodei puterii:

- Există un set de n vectori proprii *liniar independenți*.
- Există o *singură* valoare proprie dominantă λ_1 :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

(Remarcați că prima inegalitate este strictă!)

Metoda:

Fie $\mathbf{w}^{(0)}$ un vector inițial, ales arbitrar – cu singura condiție ca să aibă o componentă în direcția lui $\mathbf{x}^{(1)}$. Pentru a împlini această cerință, unele coduri generează un vector aleator. (În fapt, $\mathbf{w}^{(0)}$ este o aproximație a vectorului propriu $\mathbf{x}^{(1)}$; dacă o astfel de aproximație este cunoscută, atunci aceasta accelerează iterația de mai jos).

Desvoltăm $\mathbf{w}^{(0)}$ în baza vectorilor proprii:

$$\mathbf{w}^{(0)} = a_1\mathbf{x}^{(1)} + a_2\mathbf{x}^{(2)} + \dots + a_n\mathbf{x}^{(n)} \quad (\text{a})$$

Presupunem că $a_1 \neq 0$ ([condiția](#) de mai sus), și formăm șirul de vectori

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{A}^{k+1}\mathbf{w}^{(0)}, \quad k \geq 0$$

Avem:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^{(1)} &= \mathbf{A}\mathbf{w}^{(0)} = \lambda_1 a_1 \mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2 a_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \lambda_n a_n \mathbf{x}^{(n)} \\ &= \lambda_1 \left[a_1 \mathbf{x}^{(1)} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) a_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) a_n \mathbf{x}^{(n)} \right]\end{aligned}$$

În general,

$$\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{w}^{(0)} = (\lambda_1)^k \left[a_1 \mathbf{x}^{(1)} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k a_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k a_n \mathbf{x}^{(n)} \right] \quad (\text{b})$$

Cum $|\lambda_i| > |\lambda_1|$ pentru $i \geq 2$, urmează că rapoartele $(\lambda_i / \lambda_1)^k$ tind la 0 pentru $k \rightarrow \infty$. Astfel, pentru k crescător, vectorii $\mathbf{w}^{(k)}$ se aliniază din ce în ce mai mult la direcția vectorului propriu $\mathbf{x}^{(1)}$. În consecință, pentru un k suficient de mare, avem $\mathbf{w}^{(k)} \approx (\lambda_1)^k a_1 \mathbf{x}^{(1)}$.

Să considerăm de asemenea relația $\mathbf{w}^{(k+1)} \approx (\lambda_1)^{k+1} a_1 \mathbf{x}^{(1)}$. Luând orice coordonată non-zero a lui $\mathbf{w}^{(k+1)}$, $\mathbf{w}^{(k)}$, să zicem cea de-a m -a coordonată, obținem

$$\lambda_1 \approx \frac{w_m^{(k+1)}}{w_m^{(k)}}$$

Dezavantajul formulei precedente este că, coordonatele nenule ale lui $\mathbf{w}^{(k)}$ devin fie foarte mici ($|\lambda_1| < 1$), fie foarte mari ($|\lambda_1| > 1$), odată cu creșterea lui k . Aceasta se evită prin normalizarea (sau scalarea) lui $\mathbf{w}^{(k)}$, la fiecare pas k . Normele utilizate sunt norma- ∞ și norma-2.

Astfel, algoritmul metodei este:

$\mathbf{w}^{(0)}$ = Vector inițial

$$\mathbf{z}^{(k)} = \frac{\mathbf{w}^{(k)}}{\|\mathbf{w}^{(k)}\|}, \text{ pentru } k \geq 0 \dots \text{ Normalizare}$$

$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{z}^{(k)}$, pentru $k \geq 0 \dots$ Iterație

Teste de oprire a iterației

1. *Test de coliniaritate a doi vectori succesivi.*

Vectorii $\mathbf{z}^{(k)}$ și $\mathbf{z}^{(k+1)}$ sunt coliniari, dacă rapoartele $\rho_i = z_i^{(k+1)} / z_i^{(k)}$, $z_i^{(k)} \neq 0$ sunt egale (coordonatele nenule sunt proporționale), sau $z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} = 0$. În calculația practică, punem condiția $|\rho(i) - \rho(i_0)| \leq TOL$, dacă $|z_i^{(k)}| > TOL$; sau, să avem simultan, $|z_i^{(k)}| \leq TOL$ și $|z_i^{(k+1)}| \leq TOL$. TOL este o toleranță specificată; i_0 este indicele unei coordonate fixate: este convenabil să luăm $i_0 = imax =$ indicele coordonatei de modul maxim din $\mathbf{z}^{(k+1)}$.

Se introduc atunci, factorii de coliniaritate prin vectorul **colin**(1 : n), definit astfel:

$$colin(i) = \begin{cases} z_i^{(k+1)} / z_i^{(k)}(imax) & \dots \text{dacă } |z_i^{(k+1)}(i)| \leq TOL \text{ și } |z_i^{(k)}(i)| \leq TOL \\ z_i^{(k+1)}(i) / z_i^{(k)}(i) & \dots \text{altfel} \end{cases}$$

$$i = \overline{1, n}$$

Testul este:

$$\| \mathbf{colin} - \mathbf{colin}(imax) \| \leq TOL$$

Aceasta înseamnă să avem $\frac{z_i^{(k+1)}}{z_i^{(k)}} - \frac{z_{imax}^{(k+1)}}{z_{imax}^{(k)}} \approx 0$ (pentru $z_k^{(k)} \neq 0$).

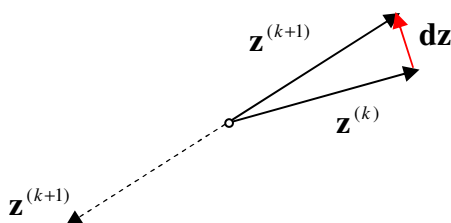
Observație

Test pentru norma-2 (euclidiană):

Dacă, pentru normalizarea lui $\mathbf{w}^{(k)}$, se utilizează norma-2, vectorii $\mathbf{z}^{(k)}$ au norma-2 egală cu 1, și testul de coliniaritate poate lua forma

$$\| \mathbf{z}^{(k+1)} - \mathbf{z}^{(k)} \|_2 \leq TOL.$$

O problemă specială apare pentru \mathbf{A} reală, dacă valoarea proprie dominantă este reală și negativă, $\lambda_1 < 0$, și anume: din $\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{z}^{(0)} = (\lambda_1)^k [a_1 \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{r}^{(k)}]$ și $\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} / \|\mathbf{w}^{(k)}\|$, rezultă că vectorul $\mathbf{z}^{(k)}$ schimbă de semn de la pasul k la pasul $k+1$. (Valoarea proprie, dată de $\lambda_1^{(k+1)} = w_m^{(k+1)} / z_m^{(k)}$, nu este afectată.).



Testul de coliniaritate trebuie să țină cont de aceasta. Astfel, definim,

$$is = \text{sign}(1., \lambda_1^{(k+1)}), \quad \mathbf{dz} = \mathbf{z}^{(k+1)} - is * \mathbf{z}^{(k)}$$

Testul corect este

$$\|\mathbf{dz}\|_2 \leq TOL.$$

■

2. Test asupra lui λ :

Iterația se oprește prin condiția

$$|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| \leq TOL$$

unde TOL este o toleranță.

3. Test de satisfacere a relației de definiție:

$$\|\mathbf{Az} - \lambda\mathbf{z}\| \leq TOL$$

Practic, $\mathbf{z} = \mathbf{z}^{(k)}$, $\mathbf{Az}^{(k)} = \mathbf{w}^{(k+1)}$, și $\lambda = \lambda^{(k+1)}$. Definind

$$\mathbf{dif} = \mathbf{w}^{(k+1)} - \lambda^{(k+1)}\mathbf{z}^{(k)},$$

se pune testul

$$\|\mathbf{dif}\| \leq TOL$$

Observații:

- În cod, dacă valorile anterioare (k) sunt stocate în $z0$ și $\lambda0$, iar valorile curente ($k+1$) în z și λ , definiția lui \mathbf{dif} devine

$$\mathbf{dif} = \mathbf{z} - \lambda * \mathbf{z0},$$

luând z înainte de normalizare.

- Vectorul $\mathbf{r} = \mathbf{Az} - \lambda\mathbf{z}$ se zice *vectorul rezidual*. Astfel, testul se mai scrie

$$\|\mathbf{r}\| \leq TOL.$$

Note

- Testul propriu pentru metodă este Testul 1, întrucât, în esență, metoda determină vectorul propriu nr. 1, și apoi determină λ_1 din acesta. Cu Testul 1, se obțin vectori proprii mai preciși decât cu Testul 2 (la aceeași toleranță).
- Testul 3 nu este specific metodei puterii, ci poate fi aplicat oricărei metode iterative pentru valori și vectori proprii. Codurile din Lapack (Bai et al.(2000)), utilizează Testul 3, cu $TOL = \varepsilon_M |\lambda|$, unde ε_M este ε -mașină.

(În metodele din ANA: Testul 3 va fi utilizat numai la verificarea sistemului propriu. Face excepție metoda puterii, unde pentru studiu, se poate alege unul din Testele 1-3; alegerea se face printr-un cod.)

■

Convergența:

Convergența $\lambda_1^{(k)} \rightarrow \lambda_1$ este liniară, iar rata convergenței este aproximativ $|\lambda_2 / \lambda_1|$.

(Acest rezultat are loc în ipoteza metodei $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, cu ipoteza suplimentară: pentru $k \geq k_1$, cantitățile $(\lambda_i / \lambda_2)^k$, $i \geq 3$, sunt neglijabile în raport cu $(\lambda_2 / \lambda_1)^k$.)

2.2 Metoda puterii inverse cu translație (shift)

Fie matricea \mathbf{A} , cu valorile proprii λ_j , $j = 1, n$. Metoda găsește valoarea proprie λ_i a lui \mathbf{A} , cea mai apropiată de un număr dat s ; adică, $|\lambda_i - s| = \text{minim}$.

Se consideră matricea

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - s\mathbf{I}$$

și presupunem că \mathbf{B} este nesingulară. Se verifică imediat că valorile proprii ale lui \mathbf{B} sunt $\mu_j = \lambda_j - s$. Cantitatea s zice *deplasare* sau *translație* (shift).

Fie $\mu_i = \lambda_i - s$, valoarea proprie de modul minim a lui \mathbf{B} , adică:

$$0 < |\mu_i| < \varepsilon < |\mu_j|, \text{ pentru } j \neq i.$$

Atunci, metoda puterii aplicată lui \mathbf{B}^{-1} produce valoarea proprie de modul maxim, fie aceasta $\nu_i = 1/\mu_i$ (ν_i este valoarea dominantă pentru \mathbf{B}^{-1}). Avem $\mu_i = 1/\nu_i$, și

$$\lambda_i = \frac{1}{\nu_i} + s.$$

Principala aplicație a metodei este de a găsi vectorul propriu, dacă este cunoscută o aproximație bună a valorii proprii, să zicem $\hat{\lambda}_i$. (Aceasta poate fi furnizată de o metodă în care se determină numai valorile proprii – nu și vectorii proprii.)

Se aplică metoda puterii inverse, cu deplasarea $s = \hat{\lambda}_i$. Chiar dacă $\hat{\lambda}_i$ este apropiată de λ_i , matricea $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \hat{\lambda}_i \mathbf{I}$ este încă nesingulară, și se obține o bună aproximație a vectorului propriu $\mathbf{x}^{(i)}$.

Metoda iterației inverse cu deplasare, este una dintre cele mai precise metode pentru calculul vectorilor proprii.

Algoritmul practic, este următorul:

Iterația din metoda puterii, aplicată la matricea \mathbf{B}^{-1} , este

$$\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{z}^{(k)}.$$

În loc de a inversa \mathbf{B} , calculăm $\mathbf{w}^{(k+1)}$ din sistemul liniar

$$\mathbf{B} \mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)},$$

prin descompunere \mathbf{LU} . Factorizarea se face o singură dată, și sistemul se rezolvă succesiv cu membrii dreپți $\mathbf{z}^{(k)}$, $k \geq 0$.

■

2.3 Metoda iterațiilor simultane – matrice hermitiană.

Aceasta este o extindere a metodei puterii pentru o matrice \mathbf{A} hermitiană (în particular, reală și simetrică). O astfel de matrice, are valori proprii reale.

Presupunem, mai mult, că valorile proprii sunt **de module distincte**:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|.$$

În loc de un vector de start $\mathbf{w}^{(0)}$, se utilizează o matrice de start, ale cărei coloane sunt vectorii de start: $\mathbf{W}^{(0)} = [\mathbf{w}^{(0,1)} \mid \mathbf{w}^{(0,2)} \mid \dots \mid \mathbf{w}^{(0,m)}]$.

Dacă matricea \mathbf{A} este $n \times n$, $\mathbf{W}^{(0)}$ este $n \times m$, unde $m \leq n$. Vectorii de start $\mathbf{w}^{(0,j)}$ trebuie să fie liniar independenți. Metoda de bază rămâne înmulțirea la stânga a lui $\mathbf{W}^{(0)}$ cu matricea \mathbf{A} , adică, $\mathbf{W}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{W}^{(k)}$, $k \geq 0$. Înainte de fiecare etapă a iterației, matricea curentă \mathbf{W} este ortogonalizată prin procedeul Gram-Schmidt, astfel încât coloanele ei $\mathbf{w}^{(j)}$ devin vectori ortonormați (ortogonali, și având norma euclidiană unitară). Astfel, vectorii $\mathbf{w}^{(j)}$ formează o bază ortonormată a sub-spațiului m -dimensional al lui \mathbf{R}^n , sub-întins de vectorii inițiali $\mathbf{w}^{(0,j)}$. În cursul iterației, această bază se aliniază din ce în ce mai mult la baza vectorilor proprii ai lui \mathbf{A} , *direcția* $\mathbf{w}^{(j)} \rightarrow \text{direcția } \mathbf{x}^{(j)}$, $j \geq 1$. Valorile proprii se evaluează prin câțul Rayleigh. Iterația se încheie când se atinge o toleranță convenabilă, privitor la direcțiile a două baze succesive $\{\mathbf{w}^{(j)}\}$. Dacă matricea de start $\mathbf{W}^{(0)}$ are $m < n$ coloane, se obțin primii m vectori proprii. Pentru $m = n$, adică $\mathbf{W}^{(0)}$ este $n \times n$, se găsesc toți vectorii proprii.

Algoritmul:

Se cere un număr $ne \leq n$ de vectori proprii. $\mathbf{W}^{(0)}$ și \mathbf{W} sunt matrici $n \times ne$.

1. Se definește matricea $\mathbf{W}^{(0)}$: dacă o aproximare inițială a vectorilor proprii nu este cunoscută, se ia $\mathbf{W}^{(0)} = [\mathbf{e}^{(1)} \mid \mathbf{e}^{(2)} \mid \dots \mid \mathbf{e}^{(ne)}]$, adică, $\mathbf{W}^{(0)}$ este formată din primele ne coloane ale matricii unitate \mathbf{I} . Pentru $ne = n$, $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{I}$.
2. Se aplică Gram-Schmidt la $\mathbf{W}^{(0)}$ (cu excepția cazului în care aceasta este deja ortonormată). Se atribuie $\mathbf{W} = \mathbf{W}^{(0)}$.
3. Inițializare contor: iter = 0
4. Iterații: iter = iter + 1;

Atribuire: $\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{W}$ (\mathbf{W} = matricea curentă; $\mathbf{W}^{(0)}$ = matricea anterioară.)

5. Se calculează $\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{W}^{(0)}$.
6. Se calculează $\lambda_j, j = \overline{1, ne}$, prin câțul Rayleigh:

Fie $\mathbf{w}^{(j)}$ și $\mathbf{w}^{(0,j)}$ a j -a coloană a lui \mathbf{W} și $\mathbf{W}^{(0)}$, respectiv; avem

$$\lambda_j = \langle \mathbf{w}^{(0,j)}, \mathbf{w}^{(j)} \rangle$$

($\mathbf{w}^{(j)} = \mathbf{A}\mathbf{w}^{(0,j)}$ – Pasul 5; și $\langle \mathbf{w}^{(0,j)}, \mathbf{w}^{(0,j)} \rangle = 1$ – Pașii 2 și 4.)

7. Se aplică Gram-Schmidt la \mathbf{W} , astfel că \mathbf{W} devine ortonormată.
8. Se verifică atingerea toleranței TOL :

Prin testul de coliniaritate – 1.3, 1: se definește **colin**(n) pentru fiecare vector

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}(:, je), \text{ și } test_val = \max_{je=1, ne} \|\mathbf{colin} - \mathbf{colin}(imax)\|.$$

(Întrucât \mathbf{z} sunt normalizați, testul se poate pune și sub forma din 1, [Observație.](#))

- Dacă $\|test_val\| \leq TOL$, ieșire din iterație.
- Altfel, GOTO 4.

Observații

- Se poate prescrie un număr limită de iterații $lnit$: atunci, se adaugă la Pasul 8 un test $iter \leq lmit$.
- Pasul 6 se poate realiza numai o singură dată, după ce s-a ieșit din iterație.

■

Observații

1. Valori proprii de același modul

Întrucât metoda iterațiilor simultane este în esență metoda puterii, nu se obține convergență pentru vectorii proprii, dacă există valori proprii de modul egal.

2. Matrici non-hermitiene

Dacă aplicăm algoritmul de mai sus unei matrici non-hermitiene, nu vom obține convergență pentru vectorii proprii, cu excepția vectorului propriu corespunzând

valorii dominante λ_1 (pentru care, metoda revine la metoda puterii). Aceasta se întâmplă deoarece ipoteza esențială a metodei este că vectorii proprii formează o bază ortogonală – și procedeul Gram-Schmidt forțează ca, la fiecare pas k , vectorii $\mathbf{w}^{(k,j)}$ să fie ortogonali.

Totuși, dacă valorile proprii sunt de module distincte, atunci vectorii proprii sunt liniar independenți, și se obțin aproximații foarte bune pentru valorile proprii.

Explicația este că, procedeul Gram-Schmidt furnizează un set de vectori $\{\mathbf{w}^{(j)}\}$ liniar independenți (ortonormați), iar valorile proprii sunt calculate cu câțul Rayleigh – care dă aproximații bune ale valorilor proprii chiar cu aproximații grosiere pentru vectorii proprii.

Valorile proprii găsite pot fi utilizate ulterior, în metoda puterii inverse cu translație, pentru a obține vectorii proprii pentru valorile λ_i , $i \geq 2$.

■

3 Metoda Jacobi – matrice reală simetrică

Metoda:

Metoda Jacobi este o metodă convenabilă pentru a găsi toate valorile proprii și vectorii proprii ai unei matrici reale și simetrice, de ordin moderat. Determinarea vectorilor proprii este opțională.

Fie \mathbf{A} o matrice reală și simetrică. Dacă \mathbf{N} este o matrice nesingulară, atunci matricea $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}$ este similară cu \mathbf{A} , și are aceleași valori proprii (bara nu notează acum conjugata). Vectorii proprii \mathbf{x} ai lui \mathbf{A} , sunt legați de vectorii proprii $\bar{\mathbf{x}}$ ai lui $\bar{\mathbf{A}}$, prin: $\mathbf{x} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{x}}$. ([Propoziția din 1.1](#)).

Să presupunem acum, că \mathbf{N} este *unitară*, adică $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^T$. Matricea $\bar{\mathbf{A}}$ devine

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{N}$$

Notați că $\bar{\mathbf{A}}$ este de asemenea simetrică.

Diagonalizarea lui \mathbf{A} :

Să presupunem că \mathbf{N} este aleasă astfel încât $\overline{\mathbf{A}}$ să devină *diagonală*:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{N} = \text{diag}(\overline{a}_{ii})$$

Pentru matricea $\overline{\mathbf{A}}$, avem proprietățile:

- Valorile proprii ale lui $\overline{\mathbf{A}}$ sunt elementele diagonale: $\lambda_i = \overline{a}_{ii}$
- Vectorii proprii ai lui $\overline{\mathbf{A}}$ sunt coloanele matricii unitate \mathbf{I} :
 $\overline{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$ (unde $e_j^{(i)} = \delta_{ij}$).

În consecință, rezultă pentru \mathbf{A} :

- Valorile proprii ale lui \mathbf{A} se găsesc pe diagonala matricii $\overline{\mathbf{A}}$.
- Vectorii proprii ai lui \mathbf{A} sunt coloanele matricii \mathbf{N} .

Exemplu:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{N} \mathbf{e}^{(1)} = \begin{bmatrix} n_{11} & \dots \\ n_{21} & \dots \\ \vdots & \\ n_{n1} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ \vdots \\ n_{n1} \end{bmatrix}$$

Diagonalizarea Jacobi:

Metoda Jacobi constă în transformări unitare (sau, ortogonale) aplicate succesiv lui \mathbf{A} , până la obținerea unei forme aproape diagonale. Anume, dacă \mathbf{N}_i sunt matrici unitare, matricea \mathbf{A} se transformă cum urmează:

$$\overline{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{N}_1^T \mathbf{A} \mathbf{N}_1$$

$$\overline{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{N}_2^T \overline{\mathbf{A}}_1 \mathbf{N}_2 = (\mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_1^T) \mathbf{A} (\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2)$$

...

$$\overline{\mathbf{A}}_k = \mathbf{N}_k^T \overline{\mathbf{A}}_{k-1} \mathbf{N}_k = (\mathbf{N}_k^T \mathbf{N}_{k-1}^T \dots \mathbf{N}_1^T) \mathbf{A} (\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \dots \mathbf{N}_k)$$

Dacă matricea $\overline{\mathbf{A}}_k$ este *aproape* diagonală, adică, elementele non-diagonale sunt aproximativ zero, luăm

$$\overline{\mathbf{A}} \approx \overline{\mathbf{A}}_k = \mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{N}$$

unde

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \dots \mathbf{N}_k$$

Observații

- Transformările \mathbf{N}_i se aplică succesiv, fiecare dintre ele eliminând elementul non-diagonal de mărime maximă.
- Elementele reduse la zero într-o transformare nu rămân zero la transformarea următoare. Dar, se poate arăta că fiecare transformare reduce suma de pătrate a elementelor non-diagonale cu $2a_{pq}^2$, adică, $\sum_{i \neq j} \bar{a}_{ij}^2 = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 - 2a_{pq}^2$. Astfel, după un anumit număr de transformări, această sumă poate fi făcută mai mică decât o toleranță ε aleasă dinainte.

Pentru alte detalii, v. Cap. 5-II, 2

*Considerații de programare**Stocajul matricii:*

Se lucrează cu triunghiul superior al lui \mathbf{A} , astfel încât, după diagonalizarea lui \mathbf{A} , elementul (1,1) conține λ_1 , etc. Triunghiul superior este stocat în vectorul

a ($n * (n+1) / 2$), în ordinea coloanelor, adică:

$$a = [a_{11} \mid a_{12} \quad a_{22} \mid a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33} \mid \dots \mid a_{1n} \quad a_{2n} \quad \dots \quad a_{nn}]$$

Adresa elementului (i, j) este dată de următoarea funcție:

$$Loca(i, j) = (j - 1) * j / 2 + i$$

În particular, elementul diagonal (i, i) are adresa $Loca(i, i) = (i + 1) * i / 2$. După ce s-a efectuat o transformare, matricea curentă $\bar{\mathbf{A}}$ este stocată în același vector a .

**Strategia de eliminare**

Aceasta este *căutarea completă*, adică: se caută în toată matricea \mathbf{A} (concret, în vectorul a), elementul non-diagonal de modul maxim. (Pentru alte strategii, v. „Numerical Analysis”, Cap. 5-II, 2.)

Elementele non-diagonale se consideră zero, dacă sunt mai mici (în modul) decât o toleranță TOL .