

CURS 7

OPERATORI UTILIZAȚI ÎN DINAMICA STRUCTURILOR

1 Ecuțiile Dinamicii structurilor

Vom considera ecuații de forma următoare:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t), \quad (1)$$

în care: $\mathbf{U} = [u_1(t) \dots u_n(t)]^T$ este vectorul gradelor de libertate $u_j, j = \overline{1, n}$; n este numărul gradelor de libertate; $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ este o matrice constantă $n \times n$ – matricea de masă; $\mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = [g_1(u_1, \dots, u_n, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n) \dots g_n(u_1, \dots, u_n, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n)]^T$ este funcția de amortizare; $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [f_1(u_1, \dots, u_n) \dots f_n(u_1, \dots, u_n)]^T$ este funcția de rigiditate; iar $\mathbf{P}(t) = [p_1(t) \dots p_n(t)]^T$ este funcția de excitație. Matricea \mathbf{M} este simetrică și pozitiv definită.

Exemple de funcții de amortizare:

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}}; \quad \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_2(\dot{\mathbf{U}}).$$

Soluția ecuației (1) se mai zice *răspuns* (dinamic), și anume: $\mathbf{U}(t)$ - răspuns în deplasări, $\dot{\mathbf{U}}(t)$ - răspuns în viteze, etc.

În particular, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}})$ și funcțiile \mathbf{f} și \mathbf{g} sunt liniare (sau $\mathbf{g}_1 = \mathbf{C} = \text{constant}$), sistemul se zice *liniar* și ecuația (1) ia forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t), \quad (2)$$

în care $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ și $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ sunt matrici constante $n \times n$, numite matricea de amortizare și de rigiditate, respectiv. Matricea \mathbf{K} este simetrică și pozitiv definită.

În particular, dacă $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, ecuația (2) devine:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \quad (2')$$

Condițiile inițiale pentru (1, 2) sunt:

$$\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0, \quad (3)$$

unde obișnuit, $t_0 = 0$. Pentru unii operatori este necesară și accelerația inițială $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$, care se determină din ecuația (1) sau (2) scrisă pentru $t = t_0$. De exemplu, pentru (1) rezultă:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{P}(t_0) - \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) \quad (4)$$

Determinarea lui $\ddot{\mathbf{U}}^{(0)}$ revine la rezolvarea sistemului liniar (4).

Observație

În cazul $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, sau dacă \mathbf{C} îndeplinește o condiție – v. mai jos, ecuațiile liniare (2) se pot decupla cum urmează. Se consideră ecuația mișcării libere ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

care se integrează căutând soluții de forma $\mathbf{U} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$, obținând

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Se arată că problema de valori proprii $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$ are valori proprii reale și pozitive, astfel că $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Vectorii proprii \mathbf{A} sunt ortogonali în raport cu \mathbf{M} și cu \mathbf{K} , adică: $\mathbf{a}_i^T \mathbf{M} \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_i^T \mathbf{K} \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $j \neq i$. Considerăm matricea Φ cu coloanele formate din vectorii proprii \mathbf{A}_i . Avem: $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \text{diag}(M_l)$, $\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(K_l)$, și $K_l = \omega_l^2 M_l$. Punem

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{Y}.$$

Înlocuind în (2) și înmulțind la stânga cu Φ^T , rezultă

$$(\Phi^T \mathbf{M} \Phi) \ddot{\mathbf{Y}} + (\Phi^T \mathbf{C} \Phi) \dot{\mathbf{Y}} + (\Phi^T \mathbf{K} \Phi) \cdot \mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{P}(t).$$

Dacă matricea $\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}(C_l)$, (în particular aceasta are loc dacă $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$) rezultă:

$$\text{diag}(M_l) \ddot{\mathbf{Y}} + \text{diag}(C_l) \dot{\mathbf{Y}} + \text{diag}(K_l) \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{P}}(t)$$

în care $\bar{\mathbf{P}}(t) = \Phi^T \mathbf{P}(t)$. Sau,

$$\ddot{y}_l + 2\xi_l \omega_l \dot{y}_l + \omega_l^2 y_l = p_l(t), \quad l = \overline{1, n} \quad (5)$$

unde s-a pus $C_l / M = 2\zeta_l \omega_l$, $p_l(t) = \bar{P}_l(t) / M_l$, iar $K_l / M_l = \omega_l^2$. În particular, dacă $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, avem:

$$\ddot{y}_l + \omega_l^2 y = p_l(t), \quad l = \overline{1, n} \quad (5')$$

■

Ecuțiile (1, 2) sunt reductibile la un sistem de ordinul unu și pot fi integrate cu metodele expuse în Curs 6 – de exemplu metode Runge-Kutta, sau pot fi integrate cu metode pentru ecuații de ordinul doi. Totuși, pentru ecuațiile (1,2), s-au dezvoltat metode speciale de integrare directă. O prezentare comparativă se dă în Dokainsh and Subbaraj (1989). O analiză a metodei diferențelor centrale, Houbolt, Newmark și Wilson, se dă în Bathe and Wilson (1976). Metoda Newmark este expusă în articolul autorului (1959), și analizată în multe studii ulterioare. În această Secțiune vom prezenta câteva dintre aceste metode.

■

Un *operator de integrare directă* este constituit din două formule care dau expresia deplasării U_{i+1} și vitezei \dot{U}_{i+1} , în funcție de valorile lui U și derivatelor acestuia, pe pasul/pașii anteriori. Clasificarea în operatori expliți/impliciți și operatori într-un singur pas/în mai mulți pași, dată în 7-2, se aplică.

2 Operatori expliți

Următorii operatori expliți sunt utilizați:

- Metoda diferențelor centrale (ordin 2; explicită – numai dacă \mathbf{g} este liniară)
- Metode Runge-Kutta (ordin 4)

Metoda Runge-Kutta cere transformarea ecuației (1, 2) într-un sistem echivalent de ordinul întâi.

- Se mai pot utiliza operatori multi-pas (liniari), expliți sau impliciți, pentru ecuații diferențiale de ordinul doi.

Pentru aceasta, ecuația de ordinul doi $\ddot{u} = f(t, u, \dot{u})$ se transformă într-un sistem echivalent de ordinul întâi, adică:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= f(t, u, v)\end{aligned}$$

Apoi, se aplică un operator multi-pas (pentru fiecare din ecuații), în forma:

$$\sum_{l=0}^k a_l u_l = h \sum_{l=0}^k b_l v_l, \quad \sum_{l=0}^k a_l v_l = h \sum_{l=0}^k b_l f_l,$$

în care $f_l = f(t_l, u_l, v_l)$.

■

În particular, pentru *ecuații de forma* $\ddot{u} = f(t, u)$ (aceasta revine la ecuația (1) în care nu există amortizare: $\mathbf{g} = \mathbf{0}$), operatorul ia forma:

$$\sum_{l=0}^k a_l u_l = h^2 \sum_{l=0}^k b_l f_l \quad (6a)$$

unde $f_l = f(t_l, u_l)$.

Condițiile de ordin pentru operatorul (6a), pentru o ecuație diferențială de ordinul doi care nu conține amortizare, sunt analoage cu cele pentru ecuații de ordinul întâi – Curs 6, 4.2.1, și anume (v. Hairer et al., 1987):

$$\begin{aligned}d_0 &= \sum_{l=0}^k a_l = 0 & (q = 0) \\ d_1 &= \sum_{l=0}^k l a_l - \sum_{l=0}^k b_l = 0 & (q = 1) \\ d_q &= \sum_{l=0}^k l^q a_l - q(q-1) \sum_{l=0}^k l^{q-2} b_l = 0, \quad q = 2, \dots, p+1 & (6b)\end{aligned}$$

$$d_{p+2} = \sum_{l=0}^k l^{p+2} a_l - (p+2)(p+1) \sum_{l=0}^k l^p b_l \neq 0 \quad (q = p+2)$$

Ordinul operatorului (6a) este numărul natural p pentru care avem

$$d_0 = 0, d_1 = 0, \dots, d_{p+1} = 0 \text{ și } d_{p+2} \neq 0.$$

Ele asigură că formula pentru u este exactă pentru un polinom de grad p , și nu mai este exactă pentru un polinom de grad $p+1$.

■

2.1 Metoda diferențelor centrale

Vom expune *metoda diferențelor centrale*: vom da formulele pentru o singură ecuație ($n = 1$), generalizând apoi, la un sistem.

2.1.1 Formulele metodei

Presupunem că u admite derivate continue până la ordinul 4 inclusiv. Desvoltările Taylor pentru $u(t+h)$ și $u(t-h)$ dau:

$$u(t+h) = u(t) + hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_1); \quad t < \xi_1 < t+h$$

$$u(t-h) = u(t) - hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_2); \quad t-h < \xi_2 < t$$

Adunând relațiile anterioare și explicitând $u''(t)$, se obține:

$$u''(t) = \frac{1}{h^2}[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{24}[u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]$$

Cu teorema Darboux avem $[u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]/2 = u^{(4)}(\xi)$, unde

$t-h < \xi < t+h$. Rezultă:

$$u''(t) = \frac{1}{h^2}[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi); \quad t-h < \xi < t+h$$

Analog, scăzând desvoltările Taylor (până la termenul în $u^{(3)}$), și împărțind cu $2h$, se obține:

$$u'(t) = \frac{1}{2h}[u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{12}[u^{(3)}(\eta_1) + u^{(3)}(\eta_2)]$$

sau

$$u'(t) = \frac{1}{2h}[u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta); \quad t-h < \eta < t+h$$

Rescriem relațiile anterioare pentru $t = t_i$, $t+h = t_{i+1}$, $t-h = t_{i-1}$:

$$u''(t_i) = \frac{1}{h^2}[u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i''; \quad T_i'' = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi) \quad (7a)$$

$$u'(t_i) = \frac{1}{2h}[u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i'; \quad T_i' = -\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta) \quad (7b)$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$. Metoda diferențelor centrale constă în a aproxima derivatele \ddot{u} și \dot{u} prin primul termen din membrul doi al relațiilor anterioare. Notând cu $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ aproximațiile pentru $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$, rezultă formulele metodei:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (8b)$$

Erorile de trunchiere (locale) ale formulelor (8a) și (8b) sunt date în (7a) și (7b).

Pentru un sistem, avem:

$$\dot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{2h} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}) \quad (9a)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) \quad (9b)$$

Pentru erorile de trunchiere locale în (9a, 9b), considerăm relațiile (7a, 7b) scrise pentru fiecare coordonată $j = \overline{1, n}$; astfel, rezultă:

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i'' \quad (9c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h} (\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i' \quad (9d)$$

în care:

$$\mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12} [\dots, u_j^{(4)}(\xi_j), \dots]^T, \quad \mathbf{T}_i' = -\frac{h^2}{6} [\dots, u_j^{(3)}(\eta_j), \dots]^T$$

Rezultă și:

$$\|\mathbf{T}_i''\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} C_4, \quad \|\mathbf{T}_i'\|_\infty \leq \frac{h^2}{6} C_3,$$

unde $|u_j^{(4)}(t)| \leq C_4, |u_j^{(3)}(t)| \leq C_3$.

2.1.2 Integrarea ecuației (1, 2)

Înlocuind (9a, b), în (1) scrisă pentru momentul $t = t_i$, se obține:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) \equiv \frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + \frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot (-2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) - \mathbf{P}(t_i) = 0 \quad (10)$$

Ecuția neliniară (10) se rezolvă, cu o metodă pentru ecuații neliniare, în necunoscuta \mathbf{U}_{i+1} . Pentru $i = 0$ este necesară valoarea \mathbf{U}_{-1} , care se determină din (9a, b) scrise pentru $i = 0$, și eliminând \mathbf{U}_1 . Rezultă:

$$\mathbf{U}_{-1} = \mathbf{U}_0 - h\dot{\mathbf{U}}_0 + (h^2/2)\ddot{\mathbf{U}}_0$$

Pentru cazul ecuației liniare (2), ecuația (10) devine liniară în \mathbf{U}_{i+1} , și anume:

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{P}(t_i) - (\mathbf{K} - 2\mathbf{M}/h^2) \cdot \mathbf{U}_i - (\mathbf{M}/h^2 - \mathbf{C}/2h) \cdot \mathbf{U}_{i-1} \quad (10')$$

în care: $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/h^2 + \mathbf{C}/2h$. Coeficienții lui \mathbf{U}_l , $l = i+1, i, i-1$ se calculează la început, și se utilizează la toți pașii.

Mai general, ecuația (10) devine liniară în \mathbf{U}_{i+1} dacă \mathbf{g} este liniară.

2.1.3 Stabilitate (liniară)

Stabilitatea liniară se consideră pentru ecuația liniară (2'), cu $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Întrucât aceasta se decuplează în forma (6), stabilitatea se discută pentru o singură ecuație de forma

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (11)$$

(Ecuția (11) este echivalentul ecuației de test $x' = \lambda x$; derivând, înlocuind x' și punând $\lambda = i\omega$ se obține forma (11)). Cu (8a), ecuația (11) devine:

$$u_{i+1} - (2 - h^2\omega^2)u_i + u_{i-1} = 0 \quad (12)$$

Căutăm soluții de forma $u_j = r^j$, rezultă că r este soluție a ecuației (caracteristice)

$$r^2 - (2 - h^2\omega^2)r + 1 = 0 \quad (12')$$

unde s-a pus, pentru moment, $x = h\omega$.

Pentru ca soluția ecuației (12) să rămână mărginită trebuie ca rădăcinile ecuației (12') să satisfacă condiția $|r| \leq 1$, iar rădăcinile de modul 1 să fie cel mult duble – v. Curs 7.

Avem: $\Delta = x^2(x^2 - 4)$. Dacă rădăcinile sunt reale și distincte ($x > 2$), condiția nu poate fi îndeplinită (avem $r_1 r_2 = 1$). Pentru rădăcini complexe ($x < 2$) rezultă $|r|^2 = 1$, și $r_1 \neq r_2$. Cazul $x = 2$ conduce la $r_{1,2} = -1$, care convine. Urmează că trebuie să avem $x = h\omega \leq 2$, sau

$$h \leq \frac{2}{\omega}.$$

Pentru un sistem, considerând ecuațiile (6) pentru $i = \overline{1, n}$, rezultă condiția

$$h \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (13)$$

unde $\omega_{\max} = \max_{i=1, n} \omega_i$. Cu $T = 2\pi / \omega$, condiția (12) se pune și sub forma $h \leq \frac{T_{\min}}{\pi}$

■

Mai general, stabilitatea se poate discuta pentru ecuația (5) cu amortizare ($\zeta > 0$):

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (14)$$

Procedând ca mai sus, se obține ecuația cu diferențe:

$$(1 + \zeta\omega h)u_{i+1} - (2 - h^2\omega^2)u_i + (1 - \zeta\omega h)u_{i-1} = 0$$

și ecuația caracteristică (unde $x = h\omega$):

$$(1 + \zeta x)r^2 - (2 - x^2)r + (1 - \zeta x) = 0.$$

a) Cazul $0 < \zeta < 1$ (amortizare sub-critică):

- Rădăcini complexe sau egale: $x \leq 2\sqrt{1 - \zeta^2}$. Condiția de rădăcini de mai sus este verificată.
- Rădăcini reale: $x > 2\sqrt{1 - \zeta^2}$. Condiția de rădăcini conduce la $x \leq 2$, așadar $2\sqrt{1 - \zeta^2} < x \leq 2$.

Reunind soluțiile celor două sub-cazuri, rezultă:

$$h \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (15)$$

b) $\zeta \geq 1$ (amortizare critică/supra-critică). Se obține: $x \leq \zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}$. Rezultă:

$$h < \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}}{\omega_{\max}}. \quad (15')$$

Marginile din (15, 15') se numesc *limita de stabilitate* (liniară).

2.1.4 Eroarea de trunchiere locală în \mathbf{U}_{i+1}

Reluăm (9c, 9d):

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2} [\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}_i''; \quad \mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12} \mathbf{C}_4 \quad (9c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h} [\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}_i'; \quad \mathbf{T}_i' = -\frac{h^2}{6} \mathbf{C}_3 \quad (9d)$$

Ecuția din care se determină \mathbf{U}_{i+1} (ecuația scrisă pentru t_i), este:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2} (\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) - \mathbf{P}(t_i) = 0$$

Presupunem că $\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i$ sunt exacte. Avem:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot (\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i)) - \mathbf{P}(t_i) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Pe de altă parte:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t_i) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i)) = \mathbf{P}(t_i)$$

Scăzând din aceasta relația precedentă, se obține:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}_i'' + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) - \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Sau:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}_i'' + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}_i' - \mathbf{T}_{i+1} = 0,$$

unde \mathbf{G} este jacobianul lui \mathbf{g} în raport cu $\dot{\mathbf{U}}$, iar ξ este pe segmentul care unește punctele $\dot{\mathbf{U}}(t_i)$ și $(\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1}))/2h$. Rezultă:

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{T}_i'' + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}_i',$$

sau

$$\mathbf{T}_{i+1} = -\frac{h^2}{12}(\mathbf{M}\mathbf{C}_4 + 2\mathbf{G}(\xi)\mathbf{C}_3)$$

■

2.1.5 Eroarea de trunchiere globală în u_i și ordin

Punem: $u(t_i) = u_i + e_i$, $\dot{u}(t_i) = \dot{u}_i + e'_i$. Se arată că avem:

$$|e_i| \leq Ch^2.$$

Ordin

Cum eroarea de trunchiere globală în u_i este $O(h^2)$, rezultă că metoda are ordinul

$$p = 2 \quad \blacksquare$$

Propoziție

Dacă $f'(u) \geq F^* > 0$ și $\partial g(u, \dot{u}) / \partial \dot{u} > 0$, atunci metoda are ordinul $p = 2$

■

Exemplu: pentru ecuația liniară, avem: $f'(u) = k$, $g'(\dot{u}) = c$.

Demonstrația:

Tratăm problema pentru o singură ecuație. Pentru un sistem, demonstrația este analogă.

Fie ecuația (1) pentru $n = 1$:

$$m\ddot{u} + g(u, \dot{u}) + f(u) = p(t) \quad (16)$$

Reluăm formulele (7, 8):

$$\ddot{u}(t_i) = \frac{1}{h^2}[u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i''; \quad T_i'' = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i) \quad (7a)$$

$$\dot{u}(t_i) = \frac{1}{2h}[u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i'; \quad T_i' = -\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta_i) \quad (7b)$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$.

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (8b)$$

Scăzând (8a, 8b) respectiv din (7a, 7b), avem:

$$e_i'' = \frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + T_i''$$

$$e_i' = \frac{1}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1}) + T_i'$$

S-a pus: $e_i = u(t_i) - u_i$; $e_i' = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i$; $e_i'' = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i$.

Pe de altă parte, din

$$m\ddot{u}(t_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) + f(u(t_i)) = p(t_i)$$

și

$$m\ddot{u}_i + g(u_i, \dot{u}_i) + f(u_i) = p(t_i)$$

rezultă:

$$m(\ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) - g(u_i, \dot{u}_i) + f(u(t_i)) - f(u_i) = 0$$

Sau:

$$e_i'' + \frac{1}{m} \left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i') e_i + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i') e_i' \right] + \frac{1}{m} f'(\eta_i') e_i = 0,$$

unde ξ_i' și η_i' sunt, respectiv, între $\dot{u}(t_i)$, \dot{u}_i și $u(t_i)$, u_i .

Înlocuind e_i'' și e_i' , rezultă:

$$\frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) - \frac{h^2}{12} C_{4i} + \frac{1}{m} \left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i') \frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i') \frac{1}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1}) \right] - \frac{h^2}{6} C_{3i} + \frac{1}{m} f'(\eta_i') e_i = 0$$

unde: $C_{4i} = u^{(4)}(\xi_i)$, $C_{3i} = u^{(3)}(\eta_i)$.

Punând $\beta_i = \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')/m$, $\gamma_i = \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')/2m$, $\varphi_i = f'(\eta_i')/m$, avem:

$$(1 + \beta_i)(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + \gamma_i h(e_{i+1} - e_{i-1}) + h^2 \varphi_i e_i - \frac{h^4}{12}(C_{4i} + 2C_{3i}) = 0$$

$$e_{i+1}(1 + \beta_i + h\gamma_i) - (2 + 2\beta_i - h^2\varphi_i)e_i + e_{i-1}(1 + \beta_i - h\gamma_i) = h^4 C_i,$$

unde $C_i = (C_{4i} + 2C_{3i})/12$.

Introducem coeficienții:

$$a_{i+1} = 1 + \beta_i + h\gamma_i; \quad a_i = 2 + 2\beta_i - h^2\varphi_i; \quad a_{i-1} = 1 + \beta_i - h\gamma_i.$$

Am presupus: $f'(u) > 0 \Rightarrow \partial g(u, \bar{u}) / \partial u > 0$. Astfel, pentru h suficient de mic, coeficienții a_{i+1}, a_i, a_{i-1} sunt *pozitivi*. În plus, avem:

$$a_{i+1} + a_{i-1} - a_i = h^2\varphi_i$$

Rezultă:

$$a_{i+1}e_{i+1} - a_i e_i + a_{i-1}e_{i-1} = h^4 C_i,$$

Sau

$$a_i e_i + h^4 C_i = a_{i+1}e_{i+1} + a_{i-1}e_{i-1}$$

Luând modulele, și ținând cont de $a_j > 0$, rezultă:

$$a_i e_i + h^4 |C_i| \geq a_{i+1} |e_{i+1}| + a_{i-1} |e_{i-1}|$$

Sau:

$$a_i e_i + h^4 C \geq a_{i+1} |e_{i+1}| + a_{i-1} |e_{i-1}|$$

unde $|C_i| \leq C$.

Fie

$$e = \max_{j=1, n} |e_j|,$$

și I indicele pe care este realizat maximul: $e = |e_I|$.

Avem $a_I e \geq a_i e_i$, și rezultă:

$$a_I e + h^4 C \geq a_{i+1} |e_{i+1}| + a_{i-1} |e_{i-1}|.$$

Relația anterioară are loc *pentru orice* i (membrul întâi nu depinde de i): atunci, pentru $i + 1 = I$, rezultă:

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{I-1} |e_{I-1}|.$$

Și, analog, pentru $i - 1 = I$

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{I-1} e$$

Rezultă:

$$e(a_{I+1} + a_{I-1} - a_I) \leq h^4 C$$

Sau:

$$h^2 \varphi_I e \leq h^4 C$$

$$e \leq h^2 \frac{C}{\varphi_I}$$

În fine, ținând cont de $\varphi_i = f'(\eta'_i)/m$ și de $f'(u) \geq F^* > 0$ și, avem:

$$e \leq h^2 \frac{mC}{F^*}$$

Aceasta arată că metoda are ordinul $p = 2$.

■

3 Operatori implicați

Vom prezenta operatorul Newmark (ordinul 2), și un operator cu precizie mai mare (de ordinul 3), care generalizează operatorul Newmark.

3.1 Operatorul NEWMARK

Acesta este unul dintre cel mai utilizați operatori, datorită caracteristicilor sale de stabilitate, în ciuda ordinului său relativ mic.

3.1.1 Formulele operatorului

Vom prezenta formulele pentru o singură ecuație, generalizând apoi, la sistem.

Formulele propuse de Newmark sunt (Newmark (1959)):

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1} \quad (22)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1 - \gamma)h\ddot{u}_i + \gamma h\ddot{u}_{i+1} \quad (23)$$

Se arată că dacă $\gamma \neq \frac{1}{2}$, metoda introduce o amortizare artificială a răspunsului în deplasări, proporțională cu $\gamma - \frac{1}{2}$. Luând $\gamma = \frac{1}{2}$, formula (23) devine:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{1}{2} h \ddot{u}_i + \frac{1}{2} h \ddot{u}_{i+1} \quad (23')$$

Formulele (22, 23') sunt controlate de parametrul β , de aceea metoda se mai zice metoda β -Newmark. Operatorul este implicit, întrucât conține în membrul doi \ddot{u}_{i+1} . Se observă că formulele (22, 23') pot fi scrise sub forma:

$$u_{i+1} = u_i + h \dot{u}_i + \frac{1}{2} h^2 \ddot{u}_i + \beta h^2 \Delta \ddot{u}_{i+1} \quad (24a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + h \ddot{u}_i + \gamma h \Delta \ddot{u}_{i+1} \quad (24b)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_{i+1} \quad (24c)$$

unde $\Delta \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i$ reprezintă creșterea de accelerație la sfârșitul intervalului. Astfel, formulele estimează restul în seria Taylor a funcțiilor u și \dot{u} (Chisăliță A. et al.(1990)).

Vom considera, în ceea ce urmează, forma (24 a-c) a formulelor Newmark. Pentru un sistem, acestea sunt:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1} = \bar{\mathbf{U}}_{i+1} + \beta h^2 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (25a)$$

$$\bar{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} = \bar{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} + \gamma h \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (25b)$$

$$\bar{\ddot{\mathbf{U}}}_{i+1} = \bar{\ddot{\mathbf{U}}}_{i+1} + \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (25c)$$

în care, funcțiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate, și anume:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1} = \mathbf{U}_i + h \dot{\mathbf{U}}_i + \frac{1}{2} h^2 \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (26a)$$

$$\bar{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_i + h \ddot{\mathbf{U}}_i \quad (26b)$$

3.1.2 Integrarea ecuației (1)

Notăm, pentru simplificarea scrierii, cu 1 indicele pasului curent, și 0 indicele pasului anterior ($t_i = t_0, t_{i+1} = t_1$). Înlocuind (25 a, b, c) în (1) scrisă pentru $t = t_1$, rezultă:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1) \quad (27)$$

Sau notând

$$\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1,$$

ecuația (27) devine:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0} \quad (28a)$$

în care

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{P}(t_1) \quad (28b)$$

Ecuația (28a) se rezolvă cu metoda Newton, sau cu iterația de punct fix.

Rezolvarea trebuie făcută pe fiecare pas de integrare, pentru a calcula $\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ (adică $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_{i+1}$, pentru pasul general $i+1$).

În cazul unui sistem liniar (2), $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ se determină din ecuația liniară

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{C}(\bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{K}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1)$$

sau

$$\tilde{\mathbf{M}}\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 = \tilde{\mathbf{P}},$$

unde:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \gamma h \mathbf{C} + \beta h^2 \mathbf{K}, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C} \cdot \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{U}}_1).$$

Metoda Newton

Notăm cu $\mathbf{J}(\mathbf{W})$ jacobianul funcției \mathbf{F} , adică:

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}) = \mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{B}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \gamma h \mathbf{C}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \beta h^2 \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) \quad (29a)$$

în care: \mathbf{B} și \mathbf{C} sunt jacobienii lui \mathbf{g} în raport cu \mathbf{U} și $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; iar \mathbf{A} este jacobianul lui \mathbf{f} . Explicit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) &= [\partial g_i / \partial u_j]_{i,j=1,n}; & \mathbf{C}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) &= [\partial g_i / \partial \dot{u}_j]_{i,j=1,n}; \\ \mathbf{A}(\mathbf{U}) &= [\partial f_i / \partial u_j]_{i,j=1,n} \end{aligned} \quad (29b)$$

în care \mathbf{B} și \mathbf{A} sunt jacobienii funcțiilor \mathbf{g} și \mathbf{f} , respectiv.

Pentru un sistem liniar (2), avem $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C} = \text{constant}$, $\mathbf{A} = \mathbf{K}$ (constant).

Schema de iterare este (v. 3-IV, 2.2):

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}_n) = -\mathbf{F}(\mathbf{W}_n) \quad (29a)$$

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \quad (29b)$$

Iterația (29) se continuă până când unul din testele următoare este satisfăcut:

$$\|\delta_{n+1}\| \leq \varepsilon, \quad \text{numărul de iterații} \leq LNIT,$$

unde ε și $LNIT$ sunt aleși dinainte. În general, sunt suficiente un număr redus de iterații, și metoda Newton se recomandă pentru rezolvarea ecuației (28).

Metoda punctului fix. Limită de convergență.

Ecuația (28) se poate pune sub forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{G}(\mathbf{W}) \quad (30)$$

în care:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{W}) &= \\ \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{P}(t_1)] - \ddot{\mathbf{U}}_0 \end{aligned} \quad (31b)$$

Pentru convergența iterației $\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{G}(\mathbf{W}_j)$, $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$, este suficient ca:

$$\|\mathbf{J}_G(\mathbf{W})\|_{\infty} < 1$$

unde $\mathbf{J}_G(\mathbf{W})$ este jacobianul lui \mathbf{G} . Aceasta conduce la condiția (Chisăliță A. et al. (1991))

$$h < h_c, \quad h_c = \frac{-b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + 4(M/n)a\beta}}{2a\beta},$$

în care $1/M = \|\mathbf{M}^{-1}\|_{\infty}$, iar $|\partial g_i / \partial \dot{u}_j| < b$ și $|\partial f_i / \partial u_j| < a$, respectiv. În particular, pentru o singură ecuație ($n = 1$) de tipul (5), avem $m = 1$, $b = 2\zeta\omega$, $a = \omega^2$, și rezultă:

$$h_c = \frac{-\zeta\gamma + \sqrt{\zeta^2\gamma^2 + \omega^2\beta}}{\omega^2\beta}.$$

Pentru $\zeta = 0$, se regăsește rezultatul din Newmark (1959), $h_c = 1/(\omega\sqrt{\beta})$.

3.1.3 Stabilitatea operatorului Newmark (stabilitatea liniară)

Vom urma, cu titlu de exercițiu, ideea tratării din Newmark (1959). Considerăm ecuația liniară de tipul (6)

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

și formula (22) scrisă pentru $i+1$ și pentru i . Avem:

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_i = u_{i-1} + h\dot{u}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_{i-1} + \beta h^2\ddot{u}_i$$

Scăzând cele două relații, obținem:

$$u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1} + h(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) + \beta h^2(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

Din (23) evaluăm:

$$h(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) = (1 - \gamma)h^2\ddot{u}_i + \gamma h^2\ddot{u}_{i+1} = h^2\ddot{u}_{i-1} + \gamma h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

Înlocuind, și punând în evidență un termen în $(\gamma - \frac{1}{2})$, se obține:

$$u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} - \beta h^2\ddot{u}_{i+1} - \beta h^2\ddot{u}_{i-1} - (1 - 2\beta)h^2\ddot{u}_i - (\gamma - \frac{1}{2})h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

În fine, înlocuind din ecuația diferențială $\ddot{u} = -\omega^2 u$, se obține ecuația cu diferențe:

$$u_{i+1} - (2 - \alpha^2)u_i + u_{i-1} + (\gamma - \frac{1}{2})\alpha^2(u_i - u_{i-1}) = 0$$

în care:

$$\alpha^2 = \frac{h^2\omega^2}{1 + \beta h^2\omega^2}$$

Ținând cont că $u_i - u_{i-1} \cong h\dot{u}_{i-1}$, ultimul termen din ecuația cu diferențe de mai sus are forma unei forțe de amortizare $c\dot{u}$, introdusă artificial de metodă. Coeficientul de amortizare este proporțional cu $(\gamma - \frac{1}{2})$. Pentru a exclude aceasta, luăm $\gamma = \frac{1}{2}$ și avem:

$$u_{i+1} - (2 - \alpha^2)u_i + u_{i-1} = 0 \quad (31)$$

Ecuția cu diferențe (31) a fost întâlnită în 2.1.3 – ecuația (12). Ecuția caracteristică este (12') în care $x = \alpha$. Utilizând rezultatul din 2.1.3, pentru stabilitate trebuie să avem $\alpha \leq 2$, care conduce la condițiile:

$$\beta \geq \frac{1}{4}: \quad \forall h > 0$$

$$\beta < \frac{1}{4}: \quad h < \frac{2}{\omega\sqrt{1-4\beta}}$$

Coefficientul β se alege astfel că $\beta \leq \frac{1}{4}$. Pentru $\beta = \frac{1}{4}$, metoda este stabilă pentru orice h și se zice *necondiționat stabilă* ■

Tratarea stabilității pentru ecuația cu amortizare (5) este mult mai complexă. Pentru aceasta se va utiliza metoda expusă mai jos, în 3.3. Vom da numai rezultatele numai pentru cazul de interes $\gamma \geq \frac{1}{2}$ (amortizare pozitivă):

$$\beta \geq \frac{\gamma}{2}: \quad \forall h \text{ (independent de } \zeta)$$

$$\beta < \frac{\gamma}{2}: \quad h < \frac{1}{\omega} x_2,$$

$$\text{unde } x_2 = [\zeta(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\Delta}]/(\gamma/2 - \beta), \quad \Delta = \zeta^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\gamma/2 - \beta)^2.$$

Adăugăm că, pentru $\zeta = 0$, operatorul este instabil dacă $\gamma < \frac{1}{2}$.

3.1.4 Eroarea de trunchiere locală

Considerăm cazul unei singure ecuații, rezultatele generalizându-se la un sistem. Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (24a, b), în care aproximațiile u_i, \dot{u}_i , etc. se înlocuiesc cu valorile exacte $u(t_i), \dot{u}(t_i)$, etc.. Astfel, definim

$$u(t_{i+1}) = \bar{u}(t_i) + \beta h^2 (\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T_{i+1}$$

$$\dot{u}(t_{i+1}) = \bar{\dot{u}}(t_i) + \gamma h (\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T'_{i+1}$$

în care $\bar{u}(t), \bar{\dot{u}}(t)$ sunt seriile Taylor trunchiate până la termenul în h^2 . Avem:

$$u(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i) = \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi), \quad \dot{u}(t_{i+1}) - \bar{\dot{u}}(t_i) = \frac{h^2}{2} u^{(3)}(\xi'),$$

$$\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i) = hu^{(3)}(\eta),$$

unde $\xi, \xi', \eta \in (t_i, t_{i+1})$. Rezultă:

$$T_{i+1} = h^3 \left(\frac{1}{6} u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta) \right), \quad T'_{i+1} = h^2 \left(\frac{1}{2} u^{(3)}(\xi') - \gamma u^{(3)}(\eta) \right)$$

Dacă $\gamma = \frac{1}{2}$, avem:

$$T'_{i+1} = \frac{h^2}{2} (u^{(3)}(\xi') - u^{(3)}(\eta)) = \frac{h^2}{2} (\xi' - \eta) u^{(4)}(\zeta')$$

unde $t_i < \zeta' < t_{i+1}$. Rezultă astfel (pentru $\gamma = \frac{1}{2}$):

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \quad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1}, \quad (32)$$

în care:

$$C_{i+1} = \frac{1}{6} u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta), \quad C'_{i+1} = \frac{1}{2} \frac{(\xi' - \eta)}{h} u^{(4)}(\zeta') \quad (32a)$$

Punând $|u^{(3)}(t)| \leq M_3$, $|u^{(4)}(t)| \leq M_4$, avem:

$$|C_{i+1}| \leq \left(\frac{1}{6} + \beta\right) M_3, \quad |C'_{i+1}| \leq \frac{1}{2} M_4 \quad (32b)$$

În particular, dacă $\beta = \frac{1}{6}$, se obține

$$T_{i+1} = h^4 C_{i+1}, \quad (33)$$

$$C_{i+1} = \frac{1}{6} u^{(4)}(\zeta), \quad |C_{i+1}| \leq \frac{1}{6} M_4 \quad (33a)$$

unde $t_i < \zeta < t_{i+1}$. Rezultă:

$$T_{i+1} = O(h^3), \quad T'_{i+1} = O(h^3).$$

În particular, pentru $\beta = \frac{1}{6}$, se obține $T_{i+1} = O(h^4)$.

3.1.5 Ordin

Considerăm în ceea ce urmează, cazul $\gamma = \frac{1}{2}$. Avem, conform (32),

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \quad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1},$$

unde C_{i+1}, C'_{i+1} sunt mărginiți ca în (32a, 33a).

Cum erorile de trunchiere locală sunt de ordinul lui h^3 , rezultă:

Propoziția 1

Metoda Newmark cu $\gamma = \frac{1}{2}$ are ordinul $p = 2$ ■

Operatorul în forma multi-pas. Ordinul 4.

Operatorul Newmark se poate pune în forma multi-pas, cum urmează. Pentru conveniență, scriem ecuația diferențială sub forma:

$$\ddot{u} = \varphi(u, \dot{u}, t)$$

și notăm: $\ddot{u}_0 = \varphi_0 = \varphi(u_0, \dot{u}_0, t_0)$, $\ddot{u}_1 = \varphi_1 = \varphi(u_1, \dot{u}_1, t_1)$. Formulele Newmark devin:

$$u_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \frac{1}{2}h^2\varphi_0 + \beta h^2(\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_0 + h\varphi_0 + \gamma h(\varphi_1 - \varphi_0)$$

Se consideră și

$$u_2 = u_1 + h\dot{u}_1 + \frac{1}{2}h^2\varphi_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Din acestea, avem:

$$u_1 - u_0 = h\dot{u}_0 + \frac{1}{2}h^2\varphi_0 + \beta h^2(\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$u_2 - u_1 = h\dot{u}_1 + \frac{1}{2}h^2\varphi_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\dot{u}_1 - \dot{u}_0 = h\varphi_0 + \gamma h(\varphi_1 - \varphi_0)$$

Scăzând prima relație din a doua, și înlocuind $\dot{u}_1 - \dot{u}_0$, rezultă

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2[\beta\varphi_2 + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\varphi_1 + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma)\varphi_0] \quad (a)$$

Analog, cu $\dot{u}_2 - \dot{u}_1 = h\varphi_1 + \gamma h(\varphi_2 - \varphi_1)$, se obține:

$$\dot{u}_2 - 2\dot{u}_1 + \dot{u}_0 = h[\gamma\varphi_2 + (1 - 2\gamma)\varphi_1 + (\gamma - 1)\varphi_0]. \quad (b)$$

În cazul fără amortizare, ecuația este $\ddot{u} = \varphi(u, t)$ și se poate utiliza numai ecuația (a).

Propoziția 2

Dacă nu există amortizare ($g(\dot{u}) = 0$), metoda Newmark cu $\gamma = \frac{1}{2}$, și $\beta = 1/12$, are ordinul $p = 4$ ■

Metoda cu $\beta = 1/12$ se mai zice formula Fox-Goodwin.

Pentru a proba concluzia, se consideră condițiile (6b).

Astfel, punem condiția ca relațiile (6b) să fie verificate pentru $q = 0, 1, \dots, 5$. Din

acestea rezultă $\gamma = \frac{1}{2}$ și $\beta = \frac{1}{12}$; relația pentru $q = 6$ nu mai este verificată.

Rezultă că ordinul este $p = 4$.

Obsevație

Operatorul cu $\gamma = \frac{1}{2}$ este:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2[\beta\varphi_2 + (1 - 2\beta)\varphi_1 + \beta\varphi_0]$$

În particular, pentru $\beta = 1/12$, aceasta devine:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = \frac{h^2}{12}[\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0]$$

(operatorul coincide cu metoda Numerov.)

■

2.2 Un operator de ordinul trei (generalizarea operatorului Newmark)

O familie de noi operatori, care generalizează operatorul Newmark a fost introdusă de autor – v. Chisăliță A. & Chisăliță F. (1990, 1998).

Formulele operatorului

Notăm, pentru simplificare, pasul curent și anterior cu indicii 1 și 0, respectiv (în loc de $i+1$ și i). Presupunem că funcția u satisface pe intervalul

$I = [t_0, t_1]$, $t_1 = t_0 + h$, una din următoarele condiții:

(1) \ddot{u} e derivabilă în $I - \{t_0\}$;

(2) \ddot{u} e continuă în t_0 și există \ddot{u} , finită sau nu, în $I - \{t_0\}$.

Atunci, pentru orice întregi pozitivi p , p' și p'' , seria Taylor a funcțiilor u , \dot{u} și \ddot{u} , cu restul în forma Schlömilch-Roche (v. Nicolescu (1958)), este:

$$u(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0) + \beta h^3\ddot{\ddot{u}}(t_0 + \theta h) \quad (50a)$$

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0) + \gamma h^2\ddot{\ddot{u}}(t_0 + \theta' h) \quad (50b)$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta h\ddot{\ddot{u}}(t_0 + \theta'' h) \quad (50c)$$

în care θ , θ' și $\theta'' \in (0,1)$ și sunt asociați cu p , p' and p'' , respectiv, și cu t_0 , iar coeficienții β , γ și δ sunt dați de:

$$\beta = \frac{(1-\theta)^{3-p}}{2p}, \quad \gamma = \frac{(1-\theta')^{2-p'}}{p'}, \quad \delta = \frac{(1-\theta'')^{1-p''}}{p''} \quad (51)$$

Dacă notăm cu \bar{u} și $\bar{\ddot{u}}$ seriile Taylor trunchiate din (50a, b), adică:

$$\bar{u}(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0)$$

$$\bar{\ddot{u}}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0),$$

ecuațiile (50) devin:

$$u(t_1) = \bar{u}(t_1) + \beta h^3\ddot{\ddot{u}}(t_0 + \theta h) \quad (52a)$$

$$\dot{u}(t_1) = \bar{\ddot{u}}(t_1) + \gamma h^2\ddot{\ddot{u}}(t_0 + \theta' h) \quad (52b)$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta h\ddot{\ddot{u}}(t_0 + \theta'' h) \quad (52c)$$

Ecuațiile (52 a-c) reprezintă formulele generale pentru a deduce operatori de integrare directă. Aceasta se va face introducând ipoteze asupra variației $\ddot{\ddot{u}}$ pe intervalul $[t_0, t_1]$.

a) Operatorul Newmark

Să presupunem că

$$A1 \mid \ddot{\ddot{u}}(t) = \text{constant}, \text{ pe } I = [t_0, t_1].$$

Atunci, notând

$$\Delta\ddot{\ddot{u}}(t_1) = \ddot{\ddot{u}}(t_1) - \ddot{\ddot{u}}(t_0), \quad (53)$$

avem

$$\ddot{u}(t) = \Delta\ddot{u}(t_1)/h. \quad (53')$$

Formulele operatorului Newmark se obțin din (52), scrise cu ipoteza (53'), și punând valorile calculate $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$, în locul celor exacte $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$. Pentru compatibilitate cu ipoteza A1, luăm $\delta = 1$ în (52c). Această valoare corespunde la alegerea $p'' = 1$ în (51). Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{u}_1 \quad (54a)$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{u}_1 \quad (54b)$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \Delta\ddot{u}_1 \quad (54c)$$

în care, funcțiile barate sunt seriile Taylor trunchiate (scrise cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}_0, \quad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0. \quad (54d)$$

Coeficienții β and γ sunt definiți de (51) și diferite alegeri ale lui p și p' conduc la diferite metode Newmark. De exemplu, pentru $p = 3$ și $p' = 2$, se obține metoda cu $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, fără a mai fi nevoie de estimarea lui θ și θ' .

Este de notat că pasul h trebuie să fie suficient de mic pentru ca ipoteza A1 să fie satisfăcută. De asemenea, după deducerea precedentă, toate metodele Newmark rezultă din ipoteza A1, echivalentă cu variația liniară a accelerației în intervalul I .

b) Un nou operator

Presupunem că

$$A2 \mid \ddot{u}(t) \text{ variază } \textit{liniar} \text{ pe intervalul } I = [t_0, t_1]$$

Notând

$$\Delta\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0), \quad (55)$$

ipoteza A2 conduce la

$$\ddot{u}(t_0 + \theta\Delta t) = \ddot{u}(t_0) + \theta\Delta\ddot{u}(t_1) \quad (55')$$

Formulele operatorului se obțin din (52), cu ipoteza (55'), și înlocuind valorile exacte cu cele calculate. Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^3 \ddot{u}_0 + \theta \beta h^3 \Delta \ddot{u}_1 \quad (56a)$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h^2 \ddot{u}_0 + \theta' \gamma h^2 \Delta \ddot{u}_1 \quad (56b)$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \delta h \ddot{u}_0 + \theta'' \delta h \Delta \ddot{u}_1 \quad (56c)$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \Delta \ddot{u}_1 \quad (56d)$$

în care funcțiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate (cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \frac{1}{2} h^2 \ddot{u}_0, \quad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0. \quad (56e)$$

Coeficienții β , γ , δ și θ , θ' , θ'' se vor alege din condiția ca eroarea formulelor (56 a-d) să fie minimizată.

Formulele pentru un sistem:

$$\mathbf{U}_1 = \bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^3 \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta \beta h^3 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_1 = \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h^2 \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta' \gamma h^2 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57b)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta h \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta'' \delta h \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57c)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57d)$$

în care:

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_0 + h\dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{1}{2} h^2 \ddot{\mathbf{U}}_0, \quad \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \dot{\mathbf{U}}_0 + h\ddot{\mathbf{U}}_0. \quad (57e)$$

Integrarea ecuației (1, 2)

Fie ecuația (1),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t)$$

cu condițiile inițiale $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_0)$, $\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{U}}(t_0)$. Acestea, înlocuite în ecuația scrisă pentru $t = t_0$, conduc la

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{P}(t_0),$$

din care se determină $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$. Considerând ecuația (1) *derivată*, și scrisă pentru $t = t_0$, rezultă

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{P}}(t_0),$$

din care se determină $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$. S-au notat: \mathbf{B} și \mathbf{C} , jacobienii lui \mathbf{g} în raport cu \mathbf{U} și $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; \mathbf{A} este jacobianul lui \mathbf{f} ; v. (29b):

$$\mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial \dot{u}_j]_{i,j=1,n}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{U}) = [\partial f_i / \partial u_j]_{i,j=1,n}. \quad (58)$$

Pentru un sistem linear (2), avem $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, $\mathbf{A} = \mathbf{K}$ (matrici constante).

Considerăm ecuația (1) scrisă pentru momentul $t_1 = t_0 + h$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_1) = \mathbf{P}(t_1) \quad (59)$$

și înlocuim $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1$ din (57). Notând, pentru claritate, $\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$, se obține ecuația neliniară:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{W}) = & \mathbf{M}\theta''\delta h\mathbf{W} + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}) \\ & + \mathbf{M} \cdot \tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 - \mathbf{P}(t_1) \end{aligned} \quad (61b)$$

în care s-a pus:

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = \bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (61a)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma(\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (61b)$$

$$\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta(\Delta t)\ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (61c)$$

Ecuația (60) se rezolvă cu metoda Newton, iterația fiind definită de

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(n+1)} = & \mathbf{W}^{(n)} + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{J}(\mathbf{W}^{(n)})\delta_{n+1} = & -\mathbf{F}(\mathbf{W}^{(n)}) \end{aligned} \quad (62)$$

în care $\mathbf{J}(\mathbf{W}) = [\partial F_i / \partial W_j]$ este jacobianul lui \mathbf{F} , dat de:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{W}) = & \mathbf{M}\theta''\delta h + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta\beta h^3 \\ & + \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta'\gamma h^2 + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W})\theta\beta h^3 \end{aligned} \quad (63)$$

Iterația se încheie prin testele:

$$\|\delta_n\| \leq \varepsilon \quad \text{și} \quad \text{Număr de iterații} \leq LNIT \quad (64)$$

unde ε and $LNIT$ sunt alese dinainte.

Cu $\mathbf{W} = \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1$ găsită ca mai sus, din (57 a-d) se calculează valorile $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1$, care sunt luate ca valori inițiale pentru pasul următor.

În particular, pentru un sistem liniar (2) ecuația (60) devine liniară în \mathbf{W} , și anume:

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{W} = \hat{\mathbf{P}},$$

unde

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\theta''\delta\Delta t + \mathbf{C}\theta'(\Delta t)^2 + \mathbf{K}\theta\beta(\Delta t)^3,$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M}\tilde{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{C}\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}_1).$$

Eroarea de trunchiere locală și alegerea coeficienților

Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (57) când valorile calculate se înlocuiesc cu cele exacte.

Pentru eroarea să fie minimă, rezultă coeficienții:

$$\beta = \frac{1}{6}, \theta = \frac{1}{4}; \gamma = \frac{1}{2}, \theta' = \frac{1}{3}; \delta = 1, \theta'' = \frac{1}{2}$$

Cu aceștia, avem:

- Eroarea în u :

$$T_1 = h^5 C_1, \quad |C_1| < \frac{1}{24} M_5 \quad (66)$$

unde M_5 marginea lui $u^{(5)}$ pe intervalul $[t_0, t_1]$.

- Eroarea în \dot{u} :

$$T_1' = h^4 C_1', \quad |C_1'| < \frac{1}{6} M_5 \quad (67)$$

- Eroarea în \ddot{u} :

$$T_1'' = h^3 C_1'', \quad |C_1''| < \frac{1}{2} M_5 \quad (68)$$

Ordin

Revenind la pasul general $i \geq 1$, rezultatele anterioare (66-68) se scriu:

$$\begin{aligned}
T_i &= h^5 C_i, & |C_i| &< \frac{1}{24} M_5 \\
T_i' &= h^4 C_i', & |C_i'| &< \frac{1}{6} M_5 \\
T_i'' &= h^3 C_i'', & |C_i''| &< \frac{1}{2} M_5
\end{aligned} \tag{69}$$

unde $|u^{(5)}(t)| < M_5$, $t \in [t_0, TT]$.

Cum $T_i = O(h^5)$, iar $T_i' = O(h^4)$, rezultă următoarea propoziție:

Propoziția 1

Operatorul cu coeficienții $\beta = \frac{1}{6}$, $\theta = \frac{1}{4}$; $\gamma = \frac{1}{2}$, $\theta' = \frac{1}{3}$; $\delta = 1$, $\theta'' = \frac{1}{2}$, are ordinul $p = 3$ ■

Propoziția 2

Dacă nu există amortizare, operatorul are ordinul $p = 4$ ■

Aceasta se probează punând operatorul sub forma multi-pas, și anume se obține:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2 \frac{1}{12} [\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0].$$

Formula coincide cu cea a operatorului Newmark, pentru $\gamma = \frac{1}{2}$ și $\beta = \frac{1}{12}$.

■

Stabilitatea operatorului (stabilitatea liniară)

Tratăm stabilitatea pentru sistemul liniar (2) și presupunem că aceasta se decuplează în forma (5). Aceasta revine la a discuta stabilitatea pentru o singură ecuație de forma

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = p(t) \tag{80}$$

Punem:

$$x = \omega h = 2\pi(h/T). \tag{85}$$

$T = 2\pi/\omega$ notează perioada răspunsului fără amortizare.

$$a = \beta'x^2 + 2\zeta\gamma'x + \delta'$$

$$\beta' = \beta\theta, \quad \gamma' = \gamma\theta', \quad \delta' = \delta\theta''.$$

Forma matriceală a operatorului

Notăm cu

$$\mathbf{X}(t) = [u(t) \quad \dot{u}(t) \quad \ddot{u}(t) \quad \ddot{\ddot{u}}(t)]^T \quad (81)$$

Formulele operatorului se pun sub forma:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{S}\mathbf{X}_0 + \mathbf{R}p_1 \quad (86)$$

Unde:

$$\mathbf{R}_0 = [\beta'h^3 \quad \gamma'h^2 \quad \delta'h \quad 1]^T, \text{ și } \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 / (ah); \quad p_1 = p(t_1).$$

\mathbf{S} este matricea operatorului.

Calculând \mathbf{S} și aplicându-i transformarea de similaritate de finită de

$$\mathbf{S}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \text{diag}[h^{4-i}]_{i=1,4} \quad (88)$$

obținem următoarea structură a matricii \mathbf{S}' :

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} 1 - \beta'c_1 & 1 - \beta'c_2 & \frac{1}{2} - \beta'c_3 & \beta - \beta'c_4 \\ -\gamma'c_1 & 1 - \gamma'c_2 & 1 - \gamma'c_3 & \gamma - \gamma'c_4 \\ -\delta'c_1 & \delta'c_2 & 1 - \delta'c_3 & \delta - \delta'c_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 1 - c_4 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Coefficienții c_i sunt definiți de:

$$c_1 = x^2 / a, \quad c_2 = (x^2 + 2\zeta x) / a, \quad c_3 = (x^2 + 2\zeta x + 1) / a,$$

$$c_4 = (\beta x^2 + 2\zeta x + \delta) / a \quad (89a)$$

Criteriul de stabilitate

Considerăm formula de recurență (86) scrisă pentru momentul general $t = t_{i+1}$:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{X}_i + \mathbf{R}p_{i+1}, \quad i \geq 0$$

Aplicată succesiv pentru $i = 0, 1, \dots, n-1$, se obține:

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n \mathbf{X}_0 + (p_1 \mathbf{S}^{n-1} + p_2 \mathbf{S}^{n-2} + \dots + p_n \mathbf{I}) \mathbf{R} \quad (90)$$

în care $p_j = p(t_j)$, iar \mathbf{I} este matricea unitate.

Să presupunem că, condiția inițială \mathbf{X}_0 este afectată de o eroare \mathbf{d} , astfel că în loc de \mathbf{X}_0 avem:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{d}$$

Soluția calculată cu condiția inițială \mathbf{Y}_0 va fi dată de (90), fie aceasta

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{S}^n \mathbf{Y}_0 + (p_1 \mathbf{S}^{n-1} + p_2 \mathbf{S}^{n-2} + \dots + p_n \mathbf{I}) \mathbf{R} \quad (91)$$

Scăzând (91) din (90) avem eroarea

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n \mathbf{d}$$

Definiție

Operatorul se zice *stabil* dacă eroarea \mathbf{e}_n rămâne mărginită pentru $\forall n$ ■

Dacă \mathbf{S} are numai rădăcini simple, criteriul de stabilitate este:

$$\rho(\mathbf{S}) \leq 1 \quad (95)$$

unde $\rho(\mathbf{S}) = \max_i |\lambda_i|$ este raza spectrală a lui \mathbf{S} .

Dacă în (95) avem $\rho(\mathbf{S}) < 1$, atunci rezultă $n \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{e}_n \rightarrow \mathbf{0}$.

■

Rezultate:

a) Sistem fără amortizare ($\zeta = 0$)

Se obține:

$$x^2 < 6, \quad \text{sau} \quad \frac{h}{T} < \frac{\sqrt{6}}{2\pi} = 0.389848 \quad (103)$$

Aceasta este limita de stabilitate pentru raportul h/T (lungime pas/periodă).

b) Sistem cu amortizare ($\zeta \neq 0$). Operatorul cu mediere.

Utilizând criteriul Routh-Hurwitz (v. Hairer & al. (1987)), se poate arăta că pentru $\zeta \neq 0$ operatorul este *instabil* pentru orice pas h . Procesul descris mai jos, numit “medierea asupra lui \ddot{u} ”, va asigura stabilitatea operatorului pentru sisteme liniare

cu amortizare. Presupunem $p(t)$ derivabil pe intervalul $[t_0, t_1]$. Atunci, derivând ecuația de mișcare (80) avem:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = \dot{p}(t) \quad (104)$$

Susbtituind în (104), scrisă pentru $t = t_1$, valorile u_1, \dot{u}_1 și \ddot{u}_1 calculate din (52a-c), se obține o nouă valoare a lui $\ddot{u}(t_1)$, fie aceasta:

$$\ddot{u}_1^{(1)} = -\omega^2 u_1 - 2\zeta\omega\dot{u}_1 + \dot{p}(t_1) \quad (105)$$

Dacă valorile $u_1, \dot{u}_1, \ddot{u}_1$ ar fi exacte, atunci \ddot{u}_1 dat de (56d) ar fi egal cu $\ddot{u}_1^{(1)}$ dat de (105). Media cu ponderea $\nu, 0 < \nu < 1$, a acestor două valori, se va lua ca nouă aproximație a lui $\ddot{u}(t_1)$, adică:

$$\ddot{u}_1^{(m)} = \nu\ddot{u}_1 + (1 - \nu)\ddot{u}_1^{(1)} \quad (106)$$

În Figura 1 de mai jos, se dă raza spectrală $\rho^{(m)}$ a matricii $\mathbf{S}^{(m)}$ pentru $\nu = 0.5$, pentru rapoarte de amortizare ζ în plaja $0.0 \dots 0.9$, reprezentată în funcție de raportul h/T (unde T este perioada sistemului fără amortizare). Valoarea h/T pentru care $\rho^{(m)} = 1$ este limita de stabilitate pentru valoarea ζ respectivă.

În Figura 2 se dă limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru $\nu = 0.5$ și $\nu = 0.9$, reprezentată în funcție de ζ .

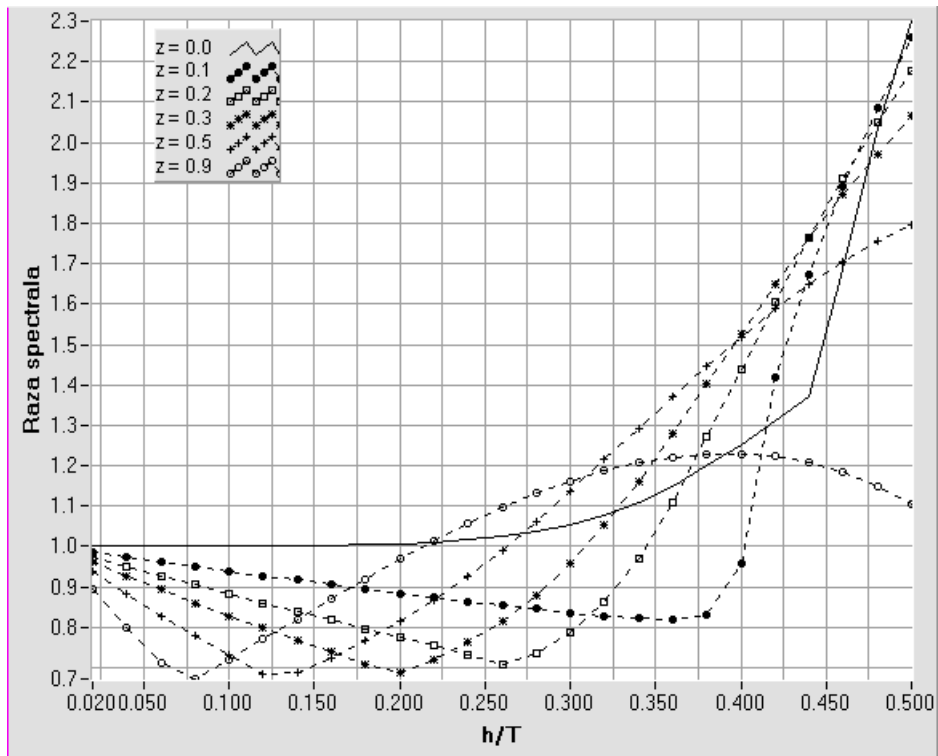


Fig. 1 – Raza spectrală pentru $\nu = 0.5$, pentru diferite rapoarte de amortizare $\zeta = z$

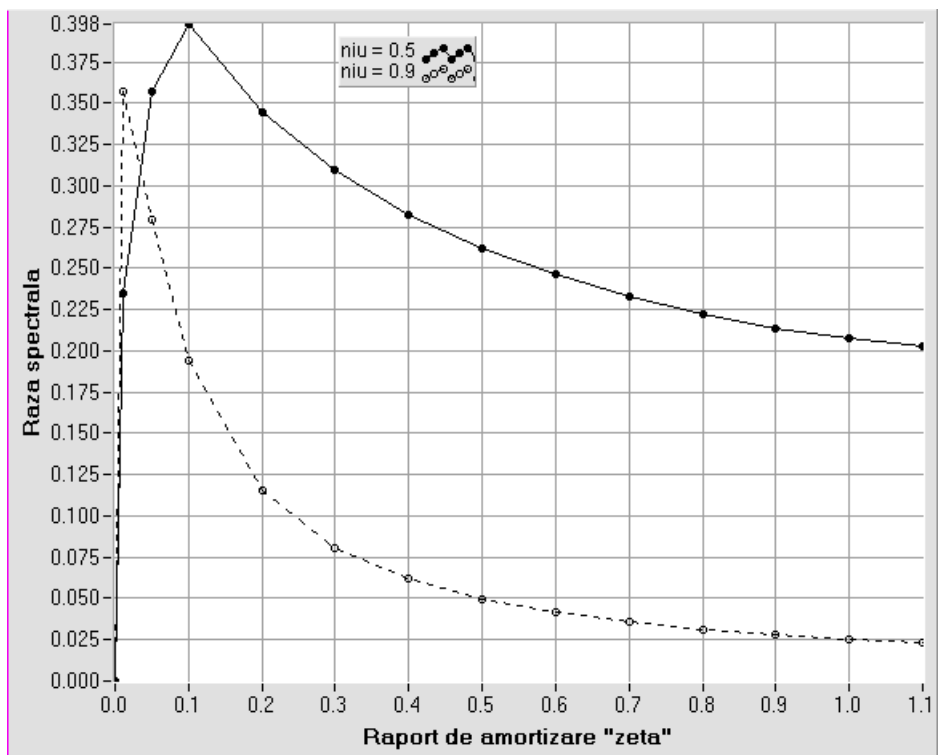


Fig. 2 – Limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru $\nu = 0.5$ și $\nu = 0.9$

Din Figura 2 se poate observa că, pentru o valoare dată ζ , limita de stabilitate descrește pe măsură ce ν ($\nu < 1$) se apropie de 1. Teste numerice (pentru sisteme liniare cu amortizare) au arătat că, valori ν apropiate de 1 oferă o precizie mai mare, dar mărimea pasului este limitată de raza spectrală. O valoare care convine este $\nu = 0.5$, adică în (106) se ia *media aritmetică* a celor două valori.

Medierea pentru $\zeta = 0$:

Utilizând polinomul caracteristic al lui $S^{(m)}$ și criteriul Routh-Hurwitz, se poate arăta analitic, că operatorul cu mediere este instabil pentru orice ν și orice h . În particular, pentru $\nu = 0.5$, aceasta se observă pe graficul din Figura 1, pentru $z = 0$: avem $\rho \geq 1$. În consecință, medierea asupra lui \ddot{u} se va utiliza *pentru și numai pentru* sisteme cu amortizare.

Observație

Pentru un sistem (2), medierea asupra lui \ddot{U} se obține pe aceeași cale ca mai sus.

Derivând ecuația (2) se obține $\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{B}(\dot{U})\dot{U} + \mathbf{A}(U)\dot{U} = \dot{\mathbf{P}}(t)$, și înlocuind

U_1, \dot{U}_1 și \ddot{U}_1 din (57 a-c) avem:

$$\mathbf{M}\ddot{U}_1^{(1)} = \dot{\mathbf{P}}(t_1) - \mathbf{B}(\dot{U}_1)\dot{U}_1 - \mathbf{A}(U_1)\dot{U}_1$$

care se rezolvă în raport $\ddot{U}_1^{(1)}$. Medierea este dată de:

$$\ddot{U}_1^{(m)} = \nu\ddot{U}_1 + (1 - \nu)\ddot{U}_1^{(1)}$$

unde \ddot{U}_1 este dat de (57d) ■

Exemplu de test – problema celor două corpuri

Considerăm din nou problema celor două corpuri – v. 3.3.9, în cazul $e = 0.9$, acesta fiind testul cel mai sever. Integrăm cu noul operator, cu coeficienții:

$$\beta = \frac{1}{6}, \beta\theta = \frac{1}{24}; \quad \gamma = \frac{1}{2}, \theta'\gamma = \frac{1}{6}; \quad \delta = 1, \theta''\delta = \frac{1}{2} \text{ – formulele (56) și luând: } eps =$$

1E-6, $init = 3$. Codul utilizat este cel dat în ANA. Comparăția rezultatelor cu cele obținute în 3.3.9 prin metoda RK4 (pas constant) se dă în tabelul următor.

$e = 0.9$, Erori absolute extreme la $t = 18.849$ (18.84 – pentru $h = 0.01$; 0.005).

Pasul h	RK4		Noul Operator	
	Eroarea absolută		Eroarea absolută	
	Maximă (\dot{x})	Minimă (x)	Maximă (\dot{x})	Minimă (x)
0.01 [†]	3.52 D0	3.54 D-1	1.58 D0	5.93 D-2
0.005	7.12 D-1	4.26 D-3	1.42 D-1	1.68 D-3
0.001	6.02 D-4	3.33 D-7	2.63 D-3	1.47 D-7
0.0005	3.28 D-5	1.82 D-8	1.64 D-5	9.13 D-9
0.0001	4.64 D-8	1.19 D-11	2.72 D-8	6.98 D-12

[†] Eroarea maximă are loc în \dot{y} .

Observații

- a) După cum se observă din tabel, erorile sunt cca. 1/2 din cele ale metodei RK4.
- b) Convergența iterației în metoda Newton (subrutina `NewOp`) este rapidă: de exemplu, pentru $h = 0.001$, după 2 iterații valorile normei corecției (`delta_w`) sunt de ordinul $10^{-13} \dots 10^{-14}$, sau chiar 0.0 (cu excepția primelor momente când au ordinul $10^{-8} \dots 10^{-12}$) ■