

OPERATORI UTILIZAȚI ÎN DINAMICA STRUCTURILOR

(Sumar)

1 Operatori de integrare numerică (intr-un singur pas, în mai mulți pași; expliți, impliți)

1.1 Definiții

Se consideră ecuația diferențială:

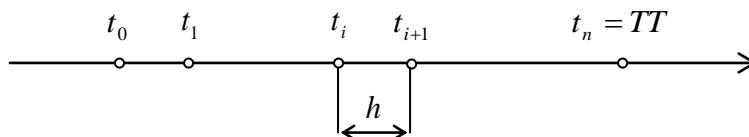
$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1-1)$$

cu condiția inițială

$$x(t_0) = x_0 \quad (1-2)$$

Găsirea soluției ecuației (1-1) printr-o metodă numerică se va numi integrare numerică sau integrare *pas cu pas*. Metoda constă în următoarele:

- Intervalul de integrare $[t_0, TT]$ se divizează prin punctele $t_i, i = \overline{0, n}$, unde $t_n = TT$.
- Ecuația (1) se cere să fie satisfăcută în punctele t_i , iar între aceste puncte, variația funcției $x(t)$ se estimează.



Vom nota în ceea ce urmează:

$x(t_i)$ = soluția exactă;

x_i = soluția calculată în t_i ;

$e_i = x(t_i) - x_i$,

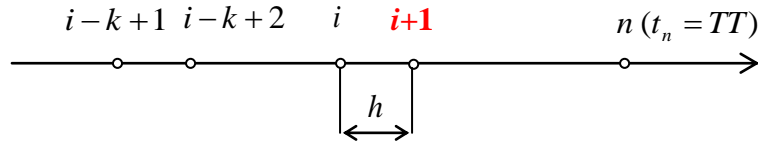
unde e_i este eroarea de trunchiere globală a metodei, pe pasul i .

Avem $x(t_i) = x_i + e_i$.

Un *operator de integrare numerică* este reprezentat de o formulă care dă soluția la momentul t_{i+1} în funcție de soluția calculată la k momente anterioare

$t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-k+1}$ (unde $i - k + 1 \geq 0$):

$$x_{i+1} = g(x_{i+1}; x_i, \dots, x_{i-k+1}) \quad (1-3)$$



Dacă în membrul doi din (1-3), g este funcție numai de x_i , și eventual x_{i+1} , operatorul se zice *într-un pas*, altfel se zice *în mai mulți pași* (și anume, în k pași), sau *multi-pas*.

Dacă în membrul doi din (1-3) apare și x_{i+1} , operatorul se zice *implicit*, în caz contrar se zice *explicit*. Integrarea prin operatori implicați conduce la rezolvarea ecuației (1-3) în necunoscuta x_{i+1} , printr-o metodă pentru ecuații neliniare.

Distanța dintre două puncte succesive de diviziune a intervalului de integrare se zice *pas* de integrare:

$$h_{i+1} = t_{i+1} - t_i.$$

Cazul comun este acela în care pasul este constant: $h_{i+1} = h$. Avem

$$t_{i+1} = t_i + h \quad (h = \text{constant}),$$

dar există algoritmi care utilizează pași variabili.

1.2 Operatori multi-pas, liniari

Dacă funcția g din (1-3) este liniară în x_j și în $f_j = f(t_j, x_j)$,

$j = i+1, i, \dots, i-k+1$, operatorul se zice *liniar*.

Considerăm cazul operatorilor multi-pas *liniari* și cu *pas constant* h , adică:

$$t_j = t_0 + jh, \quad j \geq 1;$$

Astfel, ecuația (1-3) devine

$$x_{i+1} = a'_{k-1}x_i + a'_{k-2}x_{i-1} + \dots + a'_0x_{i-k+1} + h(b_k f(t_{i+1}, x_{i+1}) + b_{k-1}f(t_i, x_i) + \dots + b_0 f(t_{i-k+1}, x_{i-k+1})) \quad (1-4)$$

În (1-4) vom presupune că cel puțin unul dintre a'_0, b_0 este diferit de zero (operatorul are k pași); în rest, oricare alt coeficient poate fi zero. Dacă $b_k \neq 0$ operatorul este implicit, iar dacă $b_k = 0$ el este explicit. Condensat, (1-4) se scrie:

$$x_{i+1} = \sum_{l=0}^{k-1} a'_l x_{i-k+1+l} + h \sum_{l=0}^k b_l f_{i-k+1+l}, \quad i \geq k-1 \quad (1-4a)$$

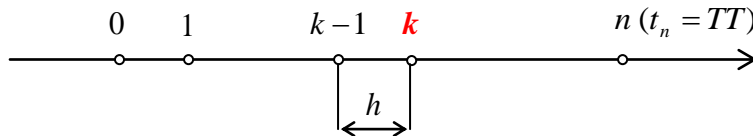
Observație

Pentru simplificarea notației indexate, să notăm

$$i+1 = k,$$

rezultă $i - k + 1 = 0$. Adică:

- Valoarea care se calculează este x_k , și cele k valori anterioare sunt $x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_0$. (Aceasta nu restrânge generalitatea).
- Momentul curent devine t_k , iar momentele anterioare sunt t_{k-1}, \dots, t_0 .



Astfel, relația (1-3) devine:

$$x_k = g(x_k; x_{k-1}, \dots, x_1, x_0) \quad (1-5)$$

Analog, operatorul multi-pas, (1-4) se scrie:

$$x_k = a'_{k-1}x_{k-1} + a'_{k-2}x_{k-2} + \dots + a'_0x_0 + h(b_k f(t_k, x_k) + b_{k-1}f(t_{k-1}, x_{k-1}) + \dots + b_0 f(t_0, x_0))$$

$$x_k = \sum_{l=0}^{k-1} a'_l x_l + h \sum_{l=0}^k b_l f_l$$

Forma generală a unei metode multi-pas (1-4) este

$$\sum_{l=0}^k a_l x_l = h \sum_{l=0}^k b_l f_l \quad (1-6)$$

în care s-a pus $a_l = -a'_l, l = \overline{0, k-1}$.

În (1-6) se pun condițiile:

$$a_k = 1 \quad (\text{mai general, } a_k \neq 0, \text{ pentru explicitare în raport cu } x_k)$$

$$|a_0| + |b_0| \neq 0 \quad (\text{metoda are } k \text{ pași}).$$

1.3 Eroare de trunchiere și ordin

Reluăm (1-5):

$$x_k = g(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, x_0)$$

Avem următoarele definiții:

- *Eroarea de trunchiere globală* pe pasul t_k este eroarea valorii calculate x_k ,

adică:

$$e_k = x(t_k) - x_k, \quad (1-7)$$

unde $x(t_k)$ este valoarea exactă (sau, valoarea adevărată).

- *Eroarea de trunchiere locală* T_k pe t_k , a metodei (1-5), este definită de:

$$x(t_k) = g(x(t_k), \dots, x(t_0)) + T_k, \quad (1-8)$$

adică eroarea formulei metodei, când valorile calculate se înlocuiesc cu valorile exacte.

■

Să presupunem acum, că cele k valori *anterioare* sunt *exacte*, adică avem

$$x_l = x(t_l), \quad l = \overline{0, k-1},$$

și calculăm x_k din (1-5). Notăm această valoare cu \tilde{x}_k , adică

$$\tilde{x}_k = g(\tilde{x}_k, x_{k-1}(t_k), \dots, x(t_0)), \quad (1-9)$$

și eroarea ei, cu

$$\tilde{e}_k = x(t_k) - \tilde{x}_k$$

Aceasta este eroarea formulei metodei, când valorile anterioare se înlocuiesc cu valorile exacte.

Înlocuind $x(t_k)$ din (1-8) și \tilde{x}_k din (1-9), rezultă relația între \tilde{e}_k și T_k :

$$\tilde{e}_k = g(x(t_k), x(t_{k-1}), \dots, x(t_0)) + T_k - g(\tilde{x}_k, x(t_{k-1}), \dots, x(t_0))$$

Dacă metoda este *explicită*, atunci avem ($x(t_k)$ și \tilde{x}_k nu apar în membrul doi):

$$\tilde{e}_k = T_k,$$

Pentru o metodă *implicită*, avem următoarele evaluări:

$$\tilde{e}_k = T_k + \frac{\partial g(\xi_k, x(t_{k-1}), \dots, x(t_0))}{\partial x_k} (x(t_k) - \tilde{x}_k)$$

unde ξ_k este între $x(t_k)$ și x_k .

Sau, cu $x(t_k) - \tilde{x}_k = \tilde{e}_k$, și notând derivata parțială cu B , avem:

$$\tilde{e}_k = T_k + B\tilde{e}_k$$

Rezultă

$$\tilde{e}_k = T_k \frac{1}{1 - B}$$

Pentru un operator liniar (1-6), se arată că avem $\tilde{e}_k = T_k + hc_k T_k + \dots$, adică, partea principală a lui \tilde{e}_k este T_k ,

Astfel, T_k poate juca rolul de măsură a erorii lui \tilde{x}_k .

■

Definiție

Formula (1-5) se zice “exactă” pentru o funcție $x(t)$ dacă eroarea de trunchiere locală este zero, $T_k = 0$.

(Adică, cu ipotezele $x_l = x(t_l)$, $l = \overline{0, k-1}$ avem și $x_k = x(t_k)$.) ■

Definiție: Ordinul metodei

Dacă eroarea de trunchiere globală este de ordinul h^p , metoda se zice de ordinul ‘ p ’ ■

Definiții echivalente ale ordinului:

- Metoda este de ordinul p dacă formula metodei este exactă pentru un polinom de gradul p , și nu mai este exactă pentru un polinom de gradul $p + 1$.
- Metoda este de ordinul p dacă formula metodei coincide cu seria Taylor trunchiată până la termenul de ordinul p inclusiv.

■

Ecuțiile Dinamicii structurilor

Ecuțiile care definesc mișcarea unui sistem cu un număr finit de grade de libertate sunt ecuații diferențiale de ordinul doi. Argumentul funcțiilor este timpul t , și vom adopta convenția de notare a derivatelor din mecanică: $dA/dt = \dot{A}$. Vom considera ecuații de forma următoare:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t), \quad (1)$$

în care: $\mathbf{U} = [u_1(t) \ \dots \ u_n(t)]^T$ este vectorul gradelor de libertate u_j , $j = \overline{1, n}$; n este numărul gradelor de libertate; $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ este o matrice constantă $n \times n$ – matricea de masă; $\mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = [g_1(u_1, \dots, u_n, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n) \ \dots \ g_n(u_1, \dots, u_n, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n)]^T$ este funcția de amortizare; $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [f_1(u_1, \dots, u_n) \ \dots \ f_n(u_1, \dots, u_n)]^T$ este funcția de rigiditate; iar $\mathbf{P}(t) = [p_1(t) \ \dots \ p_n(t)]^T$ este funcția de excitație. Matricea \mathbf{M} este simetrică și pozitiv definită.

Exemple de funcții de amortizare:

$$\mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}}; \quad \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_2(\dot{\mathbf{U}}).$$

Soluția ecuației (1) se mai zice *răspuns* (dinamic), și anume: $\mathbf{U}(t)$ - răspuns în deplasări, $\dot{\mathbf{U}}(t)$ - răspuns în viteze, etc.

În particular, dacă $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}})$ și funcțiile \mathbf{f} și \mathbf{g} sunt liniare, sistemul se zice *liniar* și ecuația (1) ia forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t), \quad (2)$$

în care $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ și $\mathbf{K} = [k_{ij}]$ sunt matrici constante $n \times n$, numite matricea de amortizare și de rigiditate, respectiv. Matricea \mathbf{K} este simetrică și pozitiv definită. În particular, dacă $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, ecuația (2) devine:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \quad (2')$$

Condițiile inițiale pentru (1, 2) sunt:

$$\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0, \quad (3)$$

unde obișnuit, $t_0 = 0$. Pentru unii operatori este necesară și accelerația inițială $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$, care se determină din ecuația (1) sau (2) scrisă pentru $t = t_0$. De exemplu, pentru (1) rezultă:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{P}(t_0) - \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) \quad (4)$$

Determinarea lui $\ddot{\mathbf{U}}^{(0)}$ revine la rezolvarea sistemului liniar (4).

Observație

În cazul $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, sau dacă \mathbf{C} îndeplinește o condiție – v. mai jos, ecuațiile liniare (2) se pot decupla cum urmează. Se consideră ecuația mișcării libere ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

care se integrează căutând soluții de forma $\mathbf{U} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, obținând

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Se arată că problema de valori proprii $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$ are valori proprii reale și pozitive, astfel că $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Vectorii proprii \mathbf{a} sunt ortogonali în raport cu \mathbf{M} și cu \mathbf{K} , adică: $\mathbf{a}_i^T \mathbf{M} \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_i^T \mathbf{K} \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $j \neq i$. Considerăm matricea Φ cu coloanele formate din vectorii proprii \mathbf{a}_i . Avem: $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \text{diag}(M_i)$, $\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(K_i)$, și $K_i = \omega_i^2 M_i$. Punem

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{Y}.$$

Înlocuind în (2) și înmulțind la stânga cu Φ^T , rezultă

$$(\Phi^T \mathbf{M} \Phi) \cdot \ddot{\mathbf{Y}} + (\Phi^T \mathbf{C} \Phi) \cdot \dot{\mathbf{Y}} + (\Phi^T \mathbf{K} \Phi) \cdot \mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{P}(t).$$

Dacă matricea $\Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}(C_l)$, (în particular aceasta are loc dacă $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$) rezultă:

$$\text{diag}(M_l) \ddot{\mathbf{Y}} + \text{diag}(C_l) \dot{\mathbf{Y}} + \text{diag}(K_l) \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{P}}(t)$$

în care $\bar{\mathbf{P}}(t) = \Phi^T \cdot \mathbf{P}(t)$. Sau,

$$\ddot{y}_l + 2\zeta_l \omega_l \dot{y}_l + \omega_l^2 y_l = p_l(t), \quad l = \overline{1, n} \quad (5)$$

unde s-a pus $C_l / M_l = 2\zeta_l \omega_l$, $p_l(t) = \bar{P}_l(t) / M_l$, iar $K_l / M_l = \omega_l^2$. În particular, dacă $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, avem:

$$\ddot{y}_l + \omega_l^2 y_l = p_l(t), \quad l = \overline{1, n} \quad (6)$$

■

Ecuatiile (1, 2) sunt reductibile la un sistem de ordinul unu și pot fi integrate cu metode numerice pentru ecuații de ordinul întâi, de exemplu metode Runge-Kutta. Sau, pot fi integrate cu metode pentru ecuații de ordinul doi (ex.: Nyström, Störmer - v. Hairer și al., 1987). Totuși, pentru ecuațiile (1,2), s-au dezvoltat metode speciale de integrare numite metode de *integrare directă*. O prezentare comparativă se găsește în Dokainsh and Subbaraj (1989). O analiză a metodei diferențelor centrale, Houbolt, Newmark și Wilson, se găsește în Bathe și Wilson (1976). Metoda Newmark este expusă în articolul autorului (1959), și analizată în multe studii ulterioare. În această Secțiune vom prezenta câteva dintre aceste metode.

Un *operator de integrare directă* este constituit din două formule care dau expresia deplasării \mathbf{U}_{i+1} și vitezei $\dot{\mathbf{U}}_{i+1}$, în funcție de valorile lui \mathbf{U} și derivatelor acestuia, pe pasul/pășii anteriori. Clasificarea în operatori expliți/impliciți și operatori într-un singur pas/în mai mulți pași, se aplică.

2 Operatori expliți

Următorii operatori expliți sunt utilizați:

- Metoda diferențelor centrale (ordin 2; explicită – numai dacă \mathbf{g} este liniară)
- Metode Runge-Kutta (ordin 4)

Metoda Runge-Kutta cere transformarea ecuației (1, 2) într-un sistem echivalent de ordinul întâi.

- Se mai pot utiliza operatori multi-pas (liniari), expliți sau impliți, pentru ecuații diferențiale de ordinul doi.

Pentru aceasta, ecuația de ordinul doi $\ddot{u} = f(t, u, \dot{u})$ se transformă într-un sistem echivalent de ordinul întâi, adică:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= f(t, u, v)\end{aligned}$$

Apoi, se aplică un operator multi-pas (pentru fiecare din ecuații), în forma:

$$\sum_{l=0}^k a_l u_l = h \sum_{l=0}^k b_l v_l, \quad \sum_{l=0}^k a_l v_l = h \sum_{l=0}^k b_l f_l,$$

în care $f_l = f(t_l, u_l, v_l)$.

În particular, pentru ecuații de forma $\ddot{u} = f(t, u)$ (aceasta revine la ecuații (1) care nu conțin amortizare: $\mathbf{g} = \mathbf{0}$), operatorul ia forma:

$$\sum_{l=0}^k a_l x_l = h^2 \sum_{l=0}^k b_l f_l \quad (6)$$

Operatori utilizați sunt: Adams (ordine 2-4); Störmer; Numerov. V. Hairer et al. (1987).

2.1 Metoda diferențelor centrale

Vom expune *metoda diferențelor centrale*: vom da formulele pentru o singură ecuație ($n = 1$), generalizând apoi, la un sistem.

2.1.1 Formulele metodei

Presupunem că u admite derivate continue până la ordinul 4 inclusiv. Dezvoltările Taylor pentru $u(t+h)$ și $u(t-h)$ dau:

$$u(t+h) = u(t) + h\dot{u}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{u}(t) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_1); \quad t < \xi_1 < t+h$$

$$u(t-h) = u(t) - h\dot{u}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{u}(t) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_2); \quad t-h < \xi_2 < t$$

Adunând relațiile anterioare, se obține:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{h^2} [u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{24} [u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]$$

Cu teorema Darboux avem $[u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]/2 = u^{(4)}(\xi)$, unde

$t-h < \xi < t+h$. Rezultă:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{h^2} [u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi); \quad t-h < \xi < t+h$$

Analog, scăzând dezvoltările Taylor (până la termenul în $u^{(3)}$), și împărțind cu $2h$, se obține:

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2h} [u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{12} [u^{(3)}(\eta_1) + u^{(3)}(\eta_2)]$$

sau

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2h} [u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{6} u^{(3)}(\eta); \quad t-h < \eta < t+h$$

Rescriem relațiile anterioare pentru $t = t_i$, $t+h = t_{i+1}$, $t-h = t_{i-1}$:

$$\ddot{u}(t_i) = \frac{1}{h^2} [u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i''; \quad T_i'' = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi) \quad (7a)$$

$$\dot{u}(t_i) = \frac{1}{2h} [u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i'; \quad T_i' = -\frac{h^2}{6} u^{(3)}(\eta) \quad (7b)$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$. Metoda diferențelor centrale constă în a aproxima derivatele

\ddot{u} și \dot{u} prin primul termen din membrul doi al relațiilor anterioare. Notând cu

$u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ aproximațiile pentru $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$, rezultă formulele metodei:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (8b)$$

Erorile de trunchiere *locale* în (8a) și (8b) sunt chiar T_i'', T_i' din (7a) și (7b).

Pentru un sistem, avem:

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{h^2}(\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) \quad (9a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{2h}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}) \quad (9b)$$

Pentru erorile de trunchiere locale în (9a, 9b), considerăm relațiile (7a, 7b) scrise pentru fiecare coordonată $j = \overline{1, n}$; astfel, rezultă:

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2}(\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i'' \quad (9c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h}(\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i' \quad (9d)$$

în care:

$$\mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12}[\dots, u_j^{(4)}(\xi_j), \dots]^T, \quad \mathbf{T}_i' = -\frac{h^2}{6}[\dots, u_j^{(3)}(\eta_j), \dots]^T$$

Rezultă și:

$$\|\mathbf{T}_i''\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} C_4, \quad \|\mathbf{T}_i'\|_\infty \leq \frac{h^2}{6} C_3,$$

$$\text{unde } |u_j^{(4)}(t)| \leq C_4, \quad |u_j^{(3)}(t)| \leq C_3.$$

2.1.2 Integrarea ecuației (1, 2)

Înlocuind (9a, 9b), în (1) scrisă pentru momentul $t = t_i$, se obține:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) \equiv \frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + \frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot (-2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) - \mathbf{P}(t_i) = 0 \quad (10)$$

Ecuația neliniară (10) se rezolvă, cu o metodă pentru ecuații neliniare, în necunoscuta \mathbf{U}_{i+1} . Pentru $i = 0$ este necesară valoarea \mathbf{U}_{-1} , care se determină din (9a, b) scrise pentru $i = 0$, și eliminând \mathbf{U}_1 . Rezultă:

$$\mathbf{U}_{-1} = \mathbf{U}_0 - h\dot{\mathbf{U}}_0 + (h^2/2)\ddot{\mathbf{U}}_0$$

Pentru cazul ecuației liniare (2), ecuația (10) devine liniară în \mathbf{U}_{i+1} , și anume:

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{P}(t_i) - (\mathbf{K} - 2\mathbf{M}/h^2) \cdot \mathbf{U}_i - (\mathbf{M}/h^2 - \mathbf{C}/2h) \cdot \mathbf{U}_{i-1} \quad (10')$$

în care: $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/h^2 + \mathbf{C}/2h$. Coeficienții lui $\mathbf{U}_l, l = i+1, i, i-1$ se calculează la început, și se utilizează la toți pașii. Mai general, ecuația (10) devine liniară în \mathbf{U}_{i+1} dacă \mathbf{g} este liniară.

2.1.3 Stabilitate (liniară)

Stabilitatea liniară se consideră pentru ecuația liniară (2'), cu $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Întrucât aceasta se decuplează în forma (6), stabilitatea se discută pentru o singură ecuație de forma

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (11)$$

(Ecuația (11) este echivalentul ecuației de test $x' = \lambda x$; derivând, înlocuind x' și punând $\lambda = i\omega$ se obține forma (11)). Cu (8a), ecuația (11) devine:

$$u_{i+1} - (2 - h^2\omega^2)u_i + u_{i-1} = 0 \quad (12)$$

Căutăm soluții de forma $u_j = r^j$, rezultă că r este soluție a ecuației (caracteristice)

$$r^2 - (2 - x^2)r + 1 = 0 \quad (12')$$

unde s-a pus, pentru moment, $x = h\omega$. Pentru ca soluția ecuației (12) să rămână mărginită trebuie ca rădăcinile ecuației (12') să satisfacă condiția $|r| \leq 1$, iar rădăcinile de modul 1 să fie cel mult duble – v. ??.

Avem: $\Delta = x^2(x^2 - 4)$. Dacă rădăcinile sunt reale și distincte ($x > 2$), condiția nu poate fi îndeplinită (avem $r_1 r_2 = 1$). Pentru rădăcini complexe ($x < 2$) rezultă $|r|^2 = 1$, și $r_1 \neq r_2$. Cazul $x = 2$ conduce la $r_{1,2} = -1$, care convine. Urmează că trebuie să avem $x = h\omega \leq 2$, sau

$$h \leq \frac{2}{\omega}.$$

Pentru un sistem, considerând ecuațiile (6) pentru $i = \overline{1, n}$, rezultă condiția

$$h \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (13)$$

unde $\omega_{\max} = \max_{i=1, n} \omega_i$. Cu $T = 2\pi / \omega$, condiția (12) se pune și sub forma

$$h \leq \frac{T_{\min}}{\pi} \quad \blacksquare$$

Mai general, stabilitatea se poate discuta pentru ecuația (5) cu amortizare ($\zeta > 0$):

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (14)$$

Procedând ca mai sus, se obține ecuația cu diferențe:

$$(1 + \zeta\omega h)u_{i+1} - (2 - h^2\omega^2)u_i + (1 - \zeta\omega h)u_{i-1} = 0$$

și ecuația caracteristică (unde $x = h\omega$):

$$(1 + \zeta x)r^2 - (2 - x^2)r + (1 - \zeta x) = 0.$$

a) Cazul $0 < \zeta < 1$ (amortizare sub-critică):

- Rădăcini complexe sau egale: $x \leq 2\sqrt{1 - \zeta^2}$. Condiția de rădăcini de mai sus este verificată.
- Rădăcini reale: $x > 2\sqrt{1 - \zeta^2}$. Condiția de rădăcini conduce la $x \leq 2$, așadar $2\sqrt{1 - \zeta^2} < x \leq 2$.

Reunind soluțiile celor două sub-cazuri, rezultă:

$$h \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (15)$$

b) $\zeta \geq 1$ (amortizare critică/supra-critică). Se obține: $x \leq \zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}$. Rezultă:

$$h < \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}}{\omega_{\max}}. \quad (15')$$

Marginile din (15, 15') se numesc *limita de stabilitate* (liniară).

2.1.4 Eroarea de trunchiere locală în \mathbf{U}_{i+1}

Reluăm (9c, 9d):

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2} [\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}_i''; \quad \mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12} \mathbf{C}_4 \quad (9c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h} [\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}'_i; \quad \mathbf{T}'_i = -\frac{h^2}{6} \mathbf{C}_3 \quad (9d)$$

Ecuția din care se determină \mathbf{U}_{i+1} (ecuația scrisă pentru t_i), este:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2} (\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) - \mathbf{P}(t_i) = 0$$

Presupunem că $\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i$ sunt exacte. Avem:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot (\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i)) - \mathbf{P}(t_i) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Pe de altă parte:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t_i) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i)) = \mathbf{P}(t_i)$$

Scăzând din aceasta relația precedentă, se obține:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}''_i + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) - \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Sau:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}''_i + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}'_i - \mathbf{T}_{i+1} = 0,$$

unde \mathbf{G} este jacobianul lui \mathbf{g} în raport cu $\dot{\mathbf{U}}$, iar ξ este pe segmentul care unește punctele $\dot{\mathbf{U}}(t_i)$ și $(\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1}))/2h$. Rezultă:

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{T}''_i + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}'_i,$$

sau

$$\mathbf{T}_{i+1} = -\frac{h^2}{12} (\mathbf{M}\mathbf{C}_4 + 2\mathbf{G}(\xi)\mathbf{C}_3)$$

■

2.1.5 Eroarea de trunchiere globală și ordin

Considerăm problema pentru o singură ecuație, generalizând apoi la un sistem. Fie ecuația (1) pentru $n = 1$:

$$m\ddot{u} + g(u, \dot{u}) + f(u) = p(t) \quad (16)$$

Propoziție

Dacă $f'(u) \geq F^* > 0$ și $\partial g(u, \dot{u}) / \partial \dot{u} > 0$, atunci metoda are ordinul $p = 2$

■

Exemplu: pentru ecuația liniară, avem: $f'(u) = k$, $g'(\dot{u}) = c$.

Demonstrația:

Tratăm problema pentru o singură ecuație. Pentru un sistem, demonstrația este analogă.

Reluăm formulele (7, 8):

$$\ddot{u}(t_i) = \frac{1}{h^2} [u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i''; \quad T_i'' = -\frac{h^2}{12} u^{(4)}(\xi_i) \quad (7a)$$

$$\dot{u}(t_i) = \frac{1}{2h} [u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i'; \quad T_i' = -\frac{h^2}{6} u^{(3)}(\eta_i) \quad (7b)$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$.

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) \quad (8b)$$

Scăzând (8a, 8b) respectiv din (7a, 7b), avem:

$$e_i'' = \frac{1}{h^2} (e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + T_i''$$

$$e_i' = \frac{1}{2h} (e_{i+1} - e_{i-1}) + T_i'$$

S-a pus: $e_i = u(t_i) - u_i$; $e_i' = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i$; $e_i'' = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i$.

Pe de altă parte, din

$$m\ddot{u}(t_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) + f(u(t_i)) = p(t_i)$$

și

$$m\ddot{u}_i + g(u_i, \dot{u}_i) + f(u_i) = p(t_i)$$

rezultă:

$$m(\ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) - g(u_i, \dot{u}_i) + f(u(t_i)) - f(u_i) = 0$$

Sau:

$$e_i'' + \frac{1}{m} \left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i') e_i + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i') e_i' \right] + \frac{1}{m} f'(\eta_i') e_i = 0,$$

unde ξ_i' și η_i' sunt, respectiv, între $\dot{u}(t_i)$, \dot{u}_i și $u(t_i)$, u_i .

Înlocuind e_i'' și e_i' , rezultă:

$$\frac{1}{h^2} (e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) - \frac{h^2}{12} C_{4i} + \frac{1}{m} \left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i') \frac{1}{h^2} (e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i') \frac{1}{2h} (e_{i+1} - e_{i-1}) \right] - \frac{h^2}{6} C_{3i} + \frac{1}{m} f'(\eta_i') e_i = 0$$

unde: $C_{4i} = u^{(4)}(\xi_i)$, $C_{3i} = u^{(3)}(\eta_i)$.

Punând $\beta_i = \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')/m$, $\gamma_i = \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')/2m$, $\varphi_i = f'(\eta_i')/m$, avem:

$$(1 + \beta_i)(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + \gamma_i h(e_{i+1} - e_{i-1}) + h^2 \varphi_i e_i - \frac{h^4}{12} (C_{4i} + 2C_{3i}) = 0$$

$$e_{i+1}(1 + \beta_i + h\gamma_i) - (2 + 2\beta_i - h^2\varphi_i)e_i + e_{i-1}(1 + \beta_i - h\gamma_i) = h^4 C_i,$$

unde $C_i = (C_{4i} + 2C_{3i})/12$.

Introducem coeficienții:

$$a_{i+1} = 1 + \beta_i + h\gamma_i; \quad a_i = 2 + 2\beta_i - h^2\varphi_i; \quad a_{i-1} = 1 + \beta_i - h\gamma_i.$$

Am presupus: $f'(u) > 0$ și $\partial g(u, \dot{u})/\partial \dot{u} > 0$. Astfel, pentru h suficient de mic, coeficienții a_{i+1}, a_i, a_{i-1} sunt *pozitivi*. În plus, avem:

$$a_{i+1} + a_{i-1} - a_i = h^2 \varphi_i$$

Rezultă:

$$a_{i+1}e_{i+1} - a_i e_i + a_{i-1}e_{i-1} = h^4 C_i,$$

Sau

$$a_i e_i + h^4 C_i = a_{i+1} e_{i+1} + a_{i-1} e_{i-1}$$

Luând modulele, și ținând cont de $a_j > 0$, rezultă:

$$a_i e_i + h^4 |C_i| \geq a_{i+1} |e_{i+1}| + a_{i-1} |e_{i-1}|$$

Sau:

$$a_i e_i + h^4 C \geq a_{i+1} |e_{i+1}| + a_{i-1} |e_{i-1}|$$

unde $|C_i| \leq C$.

Fie

$$e = \max_{j=1,n} |e_j|,$$

și I indicele pe care este realizat maximul: $e = |e_I|$.

Avem $a_I e \geq a_i e_i$, și rezultă:

$$a_I e + h^4 C \geq a_{i+1} |e_{i+1}| + a_{i-1} |e_{i-1}|.$$

Relația anterioară are loc *pentru orice* i (membrul întâi nu depinde de i): atunci, pentru $i+1 = I$, rezultă:

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{i-1} |e_{i-1}|.$$

Și, analog, pentru $i-1 = I$

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{I-1} e$$

Rezultă:

$$e(a_{I+1} + a_{I-1} - a_I) \leq h^4 C$$

Sau:

$$h^2 \varphi_I e \leq h^4 C$$

$$e \leq h^2 \frac{C}{\varphi_I}$$

În fine, ținând cont de $\varphi_i = f'(\eta'_i)/m$ și de $f'(u) \geq F^* > 0$ și, avem:

$$e \leq h^2 \frac{mC}{F^*}$$

Aceasta arată că metoda are ordinul $p = 2$.

■

3 Operatori implicați

Vom prezenta operatorul Newmark (ordinul 2), și un operator cu precizie mai mare (de ordinul 3), care generalizează operatorul Newmark.

3.1 Operatorul NEWMARK

Acesta este unul dintre cel mai utilizați operatori, datorită caracteristicilor sale de stabilitate, în ciuda ordinului său relativ mic.

3.1.1 Formulele operatorului

Vom prezenta formulele pentru o singură ecuație, generalizând apoi, la sistem.

Formulele propuse de Newmark sunt (Newmark (1959)):

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1} \quad (22)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1 - \gamma)h\ddot{u}_i + \gamma h\ddot{u}_{i+1} \quad (23)$$

Se arată că dacă $\gamma \neq \frac{1}{2}$, metoda introduce o amortizare artificială a răspunsului în deplasări, proporțională cu $\gamma - \frac{1}{2}$. Luând $\gamma = \frac{1}{2}$, formula (23) devine:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{1}{2}h\ddot{u}_i + \frac{1}{2}h\ddot{u}_{i+1} \quad (23')$$

Formulele (22, 23') sunt controlate de parametrul β , de aceea metoda se mai zice metoda β -Newmark. Operatorul este implicit, întrucât conține în membrul doi \ddot{u}_{i+1} . Se observă că formulele (22, 23') pot fi scrise sub forma:

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\Delta\ddot{u}_{i+1} \quad (24a)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + h\ddot{u}_i + \gamma h\Delta\ddot{u}_{i+1} \quad (24b)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_{i+1} \quad (24c)$$

unde $\Delta\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i$ reprezintă creșterea de accelerație la sfârșitul intervalului.

Astfel, formulele estimează restul în seria Taylor a funcțiilor u și \dot{u} (Chisăliță A. et al.(1990)).

Vom considera, în ceea ce urmează, forma (24 a-c) a formulelor Newmark. Pentru un sistem, acestea sunt:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \bar{\mathbf{U}}_{i+1} + \beta h^2 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (25a)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{U}}}_{i+1} = \bar{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} + \gamma h \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (25b)$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{U}}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{U}}_i + \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (25c)$$

în care, funcțiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate, și anume:

$$\bar{\mathbf{U}}_{i+1} = \mathbf{U}_i + h \dot{\mathbf{U}}_i + \frac{1}{2} h^2 \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \quad (26a)$$

$$\bar{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_i + h \ddot{\mathbf{U}}_i \quad (26b)$$

3.1.2 Integrarea ecuației (1)

Notăm, pentru simplificarea scrierii, cu 1 indicele pasului curent, și 0 indicele pasului anterior ($t_0 = t_i, t_1 = t_{i+1}$). Înlocuind (25 a, b, c) în (1) scrisă pentru $t = t_1$, rezultă:

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_0 + \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1) = \mathbf{P}(t_1) \quad (27)$$

Sau notând

$$\mathbf{W} = \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1,$$

ecuația (27) devine:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0} \quad (28a)$$

în care

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{M} \mathbf{W} + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_0 - \mathbf{P}(t_1) \quad (28b)$$

Ecuația (28a) se rezolvă cu metoda Newton, sau cu iterația de punct fix.

Rezolvarea trebuie făcută pe fiecare pas de integrare, pentru a calcula $\mathbf{W} = \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1$ (adică $\Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_{i+1}$, pentru pasul general $i + 1$).

În cazul unui sistem liniar (2), $\Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1$ se determină din ecuația liniară

$$\mathbf{M}(\ddot{\bar{\mathbf{U}}}_0 + \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1) + \mathbf{C}(\bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1) + \mathbf{K}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1) = \mathbf{P}(t_1)$$

sau

$$\hat{\mathbf{M}}\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 = \hat{\mathbf{P}},$$

unde:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \gamma h \mathbf{C} + \beta h^2 \mathbf{K}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}\bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{K}\bar{\mathbf{U}}_1).$$

Metoda Newton

Notăm cu $\mathbf{J}(\mathbf{W})$ jacobianul funcției \mathbf{F} , adică:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{W}) = & \mathbf{M} + \beta h^2 \mathbf{B}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) \\ & + \gamma h \mathbf{C}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \beta h^2 \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) \end{aligned} \quad (29a)$$

în care: \mathbf{B} și \mathbf{C} sunt jacobienii lui \mathbf{g} în raport cu \mathbf{U} și $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; iar \mathbf{A} este jacobianul lui \mathbf{f} . Explicit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = & [\partial g_i / \partial u_j]_{i,j=1,n}; \quad \mathbf{C}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial \dot{u}_j]_{i,j=1,n}; \\ \mathbf{A}(\mathbf{U}) = & [\partial f_i / \partial u_j]_{i,j=1,n} \end{aligned} \quad (29b)$$

Pentru un sistem liniar (2), avem $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C} = \text{constant}$, $\mathbf{A} = \mathbf{K}$ (constant).

Schema de iterare este (v. 3-IV, 2.2):

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}_n) = -\mathbf{F}(\mathbf{W}_n) \quad (30a)$$

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \quad (30b)$$

Iterația (30) se continuă până când unul din testele următoare este satisfăcut:

$$\|\delta_{n+1}\| \leq \varepsilon, \quad \text{numărul de iterații} \leq LNIT,$$

unde ε și $LNIT$ sunt aleși dinainte. În general, sunt suficiente un număr redus de iterații, și metoda Newton se recomandă pentru rezolvarea ecuației (28).

Metoda punctului fix. Limită de convergență.

Ecuția (27) se poate pune sub forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{G}(\mathbf{W}) \quad (31a)$$

în care:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{W}) = & \\ \mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{P}(t_1)] - \ddot{\mathbf{U}}_0 \end{aligned} \quad (31b)$$

Pentru convergența iterației $\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{G}(\mathbf{W}_j)$, $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$, este suficient ca:

$$\|\mathbf{J}_G(\mathbf{W})\|_{\infty} < 1$$

unde $\mathbf{J}_G(\mathbf{W})$ este jacobianul lui \mathbf{G} . Aceasta conduce la condiția (Chisăliță A. et al. (1991))

$$h < h_c, \quad h_c = \frac{-b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + 4(M/n)a\beta}}{2a\beta},$$

în care $1/M = \|\mathbf{M}^{-1}\|_{\infty}$, iar $|\partial g_l / \partial u_j| < b$ și $|\partial f_l / \partial u_j| < a$, respectiv. În particular, pentru o singură ecuație ($n = 1$) de tipul (5), avem $m = 1$, $b = 2\zeta\omega$, $a = \omega^2$, și rezultă:

$$h_c = \frac{-\zeta\gamma + \sqrt{\zeta^2\gamma^2 + \omega^2\beta}}{\omega^2\beta}.$$

Pentru $\zeta = 0$, se regăsește rezultatul din Newmark (1959), $h_c = 1/(\omega\sqrt{\beta})$.

3.1.3 Stabilitatea operatorului Newmark (stabilitatea liniară)

Vom urma, cu titlu de exercițiu, ideea tratării din Newmark (1959). Considerăm ecuația liniară de tipul (6)

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

și formula (22) scrisă pentru $i+1$ și pentru i . Avem:

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_i = u_{i-1} + h\dot{u}_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{u}_{i-1} + \beta h^2\ddot{u}_i$$

Scăzând cele două relații, obținem:

$$u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1} + h(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) + \beta h^2(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

Din (23) evaluăm:

$$h(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) = (1 - \gamma)h^2\ddot{u}_i + \gamma h^2\ddot{u}_{i+1} = h^2\ddot{u}_{i-1} + \gamma h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

Înlocuind, și punând în evidență un termen în $(\gamma - \frac{1}{2})$, se obține:

$$u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} - \beta h^2 \ddot{u}_{i+1} - \beta h^2 \ddot{u}_{i-1} - (1 - 2\beta)h^2 \ddot{u}_i - (\gamma - \frac{1}{2})h^2 (\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

În fine, înlocuind din ecuația diferențială $\ddot{u} = -\omega^2 u$, se obține ecuația cu diferențe:

$$u_{i+1} - (2 - \alpha^2)u_i + u_{i-1} + (\gamma - \frac{1}{2})\alpha^2(u_i - u_{i-1}) = 0$$

în care:

$$\alpha^2 = \frac{h^2 \omega^2}{1 + \beta h^2 \omega^2}$$

Ținând cont că $u_i - u_{i-1} \cong h\dot{u}_{i-1}$, ultimul termen din ecuația cu diferențe de mai sus are forma unei forțe de amortizare $c\dot{u}$, introdusă artificial de metodă. Coeficientul de amortizare este proporțional cu $(\gamma - \frac{1}{2})$. Pentru a exclude aceasta, luăm $\gamma = \frac{1}{2}$ și avem:

$$u_{i+1} - (2 - \alpha^2)u_i + u_{i-1} = 0 \quad (32)$$

Ecuația cu diferențe (32) a fost întâlnită în 2.1.3 – ecuația (12). Ecuația caracteristică este (12') în care $x = \alpha$. Utilizând rezultatul din 2.1.3, pentru stabilitate trebuie să avem $\alpha \leq 2$, care conduce la condițiile:

$$\beta \geq \frac{1}{4}: \quad \forall h > 0$$

$$\beta < \frac{1}{4}: \quad h < \frac{2}{\omega \sqrt{1 - 4\beta}}$$

Coeficientul β se alege astfel că $\beta \leq \frac{1}{4}$. Pentru $\beta = \frac{1}{4}$, metoda este stabilă pentru orice h și se zice *necondiționat stabilă*.

Marginea lui h se zice limita de stabilitate. Dacă punem $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (perioada),

rezultă:

$$h_{stab} = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - 4\beta}} T$$

Sau

$$\frac{h_{stab}}{T} = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - 4\beta}}$$

Exemple:

β	Limita de stabilitate
1/6	0.5513T
1/8	0.4502T
1/12	0.3898T

■

Tratarea stabilității pentru ecuația cu amortizare (5) este mult mai complexă.

Pentru aceasta se va utiliza metoda expusă mai jos, în 3.3. Vom da numai rezultatele numai pentru cazul de interes $\gamma \geq \frac{1}{2}$ (amortizare pozitivă):

$$\beta \geq \frac{\gamma}{2}: \quad \forall h \text{ (independent de } \zeta)$$

$$\beta < \frac{\gamma}{2}: \quad h < \frac{1}{\omega} x_2,$$

$$\text{unde } x_2 = [\zeta(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\Delta}] / (\gamma / 2 - \beta), \quad \Delta = \zeta^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\gamma / 2 - \beta)^2.$$

Adăugăm că, pentru $\zeta = 0$, operatorul este instabil dacă $\gamma < \frac{1}{2}$.

3.1.4 Eroarea de trunchiere locală

Considerăm cazul unei singure ecuații, rezultatele generalizându-se la un sistem.

Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (24a, b), în care aproximațiile

u_i, \dot{u}_i , etc. se înlocuiesc cu valorile exacte $u(t_i), \dot{u}(t_i)$, etc.. Astfel, definim

$$u(t_{i+1}) = \bar{u}(t_i) + \beta h^2 (\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T_{i+1}$$

$$\dot{u}(t_{i+1}) = \bar{\dot{u}}(t_i) + \gamma h (\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T'_{i+1}$$

în care $\bar{u}(t), \bar{\dot{u}}(t)$ sunt seriile Taylor trunchiate până la termenul în h^2 . Avem:

$$u(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i) = \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi), \quad \dot{u}(t_{i+1}) - \bar{\dot{u}}(t_i) = \frac{h^2}{2} u^{(3)}(\xi'),$$

$$\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i) = hu^{(3)}(\eta),$$

unde $\xi, \xi', \eta \in (t_i, t_{i+1})$. Rezultă:

$$T_{i+1} = h^3 \left(\frac{1}{6} u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta) \right), \quad T'_{i+1} = h^2 \left(\frac{1}{2} u^{(3)}(\xi') - \gamma u^{(3)}(\eta) \right)$$

Dacă $\gamma = \frac{1}{2}$, avem:

$$T'_{i+1} = \frac{h^2}{2} (u^{(3)}(\xi') - u^{(3)}(\eta)) = \frac{h^2}{2} (\xi' - \eta) u^{(4)}(\zeta')$$

unde $t_i < \zeta' < t_{i+1}$. Rezultă astfel (pentru $\gamma = \frac{1}{2}$):

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \quad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1}, \quad (33a)$$

în care:

$$C_{i+1} = \frac{1}{6} u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta), \quad C'_{i+1} = \frac{1}{2} \frac{(\xi' - \eta)}{h} u^{(4)}(\zeta') \quad (33b)$$

Punând $|u^{(3)}(t)| \leq M_3$, $|u^{(4)}(t)| \leq M_4$, avem:

$$|C_{i+1}| \leq \left(\frac{1}{6} + \beta\right) M_3, \quad |C'_{i+1}| \leq \frac{1}{2} M_4 \quad (33c)$$

În particular, dacă $\beta = \frac{1}{6}$, se obține

$$T_{i+1} = h^4 C_{i+1}, \quad (33d)$$

$$C_{i+1} = \frac{1}{6} u^{(4)}(\zeta), \quad |C_{i+1}| \leq \frac{1}{6} M_4 \quad (33e)$$

unde $t_i < \zeta < t_{i+1}$.

Rezultă:

$$T_{i+1} = O(h^3), \quad T'_{i+1} = O(h^3).$$

În particular, pentru $\beta = \frac{1}{6}$, se obține $T_{i+1} = O(h^4)$.

3.1.5 Eroarea de trunchiere globală și ordin

Considerăm în ceea ce urmează, cazul $\gamma = \frac{1}{2}$. Avem, conform (33a),

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \quad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1},$$

unde C_{i+1}, C'_{i+1} sunt mărginiți ca în (33c) sau (33e).

Definim eroarea de trunchiere globală prin:

$$e_i = u(t_i) - u_i, \quad e'_i = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i, \quad e''_i = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i \quad (34)$$

Pentru $i = 0$, se pune prin definiție – v. 1: $u_0 = u(t_0)$, $u'_0 = u'(t_0)$ și $u''_0 = u''(t_0)$, astfel că avem:

$$e_0 = 0, \quad e'_0 = 0, \quad e''_0 = 0. \quad (35)$$

Utilizând (23), eroarea de trunchiere globală e_{i+1} , se scrie:

$$e_{i+1} = u(t_{i+1}) - [u_i + h\dot{u}_i + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{u}_i + h^2\beta\ddot{u}_{i+1}]$$

sau

$$e_{i+1} = u(t_{i+1}) - [u(t_i) + h\dot{u}(t_i) + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{u}(t_i) + h^2\beta\ddot{u}(t_{i+1})] \\ + [u(t_i) + h\dot{u}(t_i) + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{u}(t_i) + h^2\beta\ddot{u}(t_{i+1})] - [u_i + h\dot{u}_i + h^2(\frac{1}{2} - \beta)\ddot{u}_i + h^2\beta\ddot{u}_{i+1}]$$

Prima diferență din membrul doi este T_{i+1} , astfel că rezultă:

$$e_{i+1} = T_{i+1} + e_i + he'_i + h^2(\frac{1}{2} - \beta)e''_i + h^2\beta e''_{i+1} \quad (36)$$

Cu (24), eroarea e'_{i+1} este:

$$e'_{i+1} = \dot{u}(t_{i+1}) - [\dot{u}_i + h(1 - \gamma)\ddot{u}_i + h\gamma\ddot{u}_{i+1}]$$

și analog, se deduce:

$$e'_{i+1} = T'_{i+1} + e'_i + h(1 - \gamma)e''_i + h\gamma e''_{i+1} \quad (37)$$

Pentru eroarea e''_i , considerăm ecuația diferențială (1) pentru $n = 1$, sub forma

$$\ddot{u} + g(\dot{u}) + f(u) = p(t),$$

(adică (15) împărțită cu m , și punând: $g/m \mapsto g$, $f/m \mapsto f$, $p/m \mapsto p$), și avem:

$$\ddot{u}(t_i) + g(\dot{u}(t_i)) + f(u(t_i)) = p(t_i)$$

$$\ddot{u}_i + g(\dot{u}_i) + f(u_i) = p(t_i)$$

Scăzând aceste ecuații rezultă:

$$e''_i + [g(\dot{u}(t_i)) - g(\dot{u}_i)] + [f(u(t_i)) - f(u_i)] = 0$$

Sau, cu

$$g(\dot{u}(t_i)) - g(\dot{u}_i) = G_i e'_i, \quad G_i = g'(\mu'_i)$$

$$f(u(t_i)) - f(u_i) = F_i e_i, \quad F_i = f'(\mu_i)$$

în care μ'_i este între $\dot{u}(t_i)$ și \dot{u}_i , iar μ_i este între $u(t_i)$ și u_i , rezultă:

$$e''_i + G_i e'_i + F_i e_i = 0 \quad (38)$$

În particular, pentru o ecuație liniară (5) avem: $G_i = 2\zeta\omega$, $F_i = \omega^2$.

Observație: Cu $e_0 = 0$, $e'_0 = 0$, se verifică $e''_0 = 0$ - v. (35) ■

Pentru relația dintre e''_{i+1} și e''_i înlocuim (36, 37) în (38) scrisă pentru $i+1$:

$$e''_{i+1} + G_{i+1} e'_{i+1} + F_{i+1} e_{i+1} = 0,$$

și ținând cont de (32) rezultă:

$$\begin{aligned} e''_{i+1}(1 + h\gamma G_{i+1} + h^2 \beta F_{i+1}) + e''_i [h(1 - \gamma)G_{i+1} + h^2(\frac{1}{2} - \beta)F_{i+1}] \\ + h^3(G_{i+1}C'_{i+1} + F_{i+1}C_{i+1}) + F_{i+1}e_i + (G_{i+1} + hF_{i+1})e'_i = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

- Pasul 1 ($i = 0$):

Cu (35), din (39) avem:

$$e''_1(1 + h\gamma G_1 + h^2 \beta F_1) + h^3(G_1C'_1 + F_1C_1) = 0$$

Împărțind cu coeficientul lui e''_1 și utilizând $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$, rezultă:

$$e''_1 = -h^3(G_1C'_1 + F_1C_1) + h^4(\dots) = 0$$

sau

$$e''_1 = h^3A''_1 + h^4B''_1; \quad A''_1 = -(G_1C'_1 + F_1C_1)$$

Apoi, din (38) și (37) rezultă, respectiv:

$$e'_1 = h^3A'_1 + h^4B'_1; \quad A'_1 = C'_1$$

$$e_1 = h^3A_1 + h^4B_1; \quad A_1 = C_1$$

- Pasul 2 ($i = 1$):

Din (39) avem:

$$e_2''(1 + h\gamma G_2 + h^2 \beta F_2) + e_1''[(1 - \gamma)G_2 + h(\frac{1}{2} - \beta)F_2] + h^3(G_2 C_2' + F_2 C_2) + F_2 e_1 + (G_2 + hF_2)e_1' = 0$$

și, cu rezultatele de la Pasul 1, rezultă:

$$e_2'' = h^3 A_2'' + h^4 B_2''; \quad A_2'' = -(G_2 C_2' + F_2 C_2 + G_2 C_1' + F_2 C_1)$$

Analog cu pasul 1, avem din (38, 37):

$$e_2' = h^3 A_2' + h^4 B_2'; \quad A_2' = C_2' + C_1'$$

$$e_2 = h^3 A_2 + h^4 B_2; \quad A_2 = C_2 + C_1$$

Prin inducție asupra lui i se demonstrează următoarea propoziție:

Propoziția 1

Dacă $\gamma = \frac{1}{2}$, avem:

$$e_i = h^3 A_i + h^4 B_i, \quad e_i' = h^3 A_i' + h^4 B_i', \quad (41)$$

unde

$$A_i = \sum_{j=1}^i C_j, \quad A_i' = \sum_{j=1}^i C_j', \quad (42)$$

iar C_j, C_j' sunt definiți de (33b-e) ■

Propoziția 1 conduce imediat la următoarea concluzie:

Propoziția 2

Metoda Newmark cu $\gamma = \frac{1}{2}$ converge, și ordinul metodei este $p = 2$ ■

Din (41), (42) și (32a, b) rezultă că avem:

$$|e_i| \leq h^3 \sum_{j=1}^i |C_j| + h^4 |B_i| \leq h^3 i(\frac{1}{2} + \beta)M_3 + h^4 B \quad (47)$$

$$|e_i'| \leq h^3 \sum_{j=1}^i |C_j'| + h^4 |B_i'| \leq h^3 i \frac{1}{2} M_4 + h^4 B' \quad (48)$$

unde $|B_i| \leq B$ și $|B_i'| \leq B'$.

Pentru convergență considerăm limita soluției calculate u_i, \dot{u}_i , pentru $h \rightarrow 0$ și $ih = c = \text{constant}$. Din (47, 48) rezultă că avem $|e_i| \rightarrow 0, |e'_i| \rightarrow 0$ și că, pentru $ih = \text{constant}$, $e_i = O(h^2)$, $e'_i = O(h^2)$, care arată că ordinul metodei este $p = 2$ ■

Observații

1) Dacă $\gamma \neq \frac{1}{2}$, atunci:

În (32) avem $T_{i+1} = h^3 C_{i+1}$, însă $T'_{i+1} = h^2 C'_{i+1}$, $|C'_{i+1}| \leq (\frac{1}{2} + \gamma) M_3$.

Propoziția 1 se modifică cum urmează: A doua relație din (41) se modifică, astfel că (41) devine

$$e_i = h^3 A_i + h^4 B_i, \quad e'_i = h^2 A'_i + h^3 B'_i, \quad (49)$$

iar (42) se menține. Rezultă că avem (47), dar în loc de (48) avem:

$$|e'_i| \leq h^2 i (\gamma + \frac{1}{2}) M_3 + h^3 B'_i = hc (\gamma + \frac{1}{2}) M_3 + h^3 B'_i$$

Astfel, pentru $h \rightarrow 0$ și $ih = c$ (constant), avem $|e_i| \rightarrow 0, |e'_i| \rightarrow 0$, deci metoda converge. Avem $e_i = O(h^2)$, dar $e'_i = O(h)$, astfel că ordinul global de convergență (pentru vectorul $[u_i, \dot{u}_i]^T$) este $p = 1$. Putem spune că, convergența în deplasări este pătratică, însă în viteze este liniară.

2) Dacă $\beta = \frac{1}{6}$, avem: $e_i = h^4 A_i + h^5 B_i$; $A_i = \sum_{j=1}^i C_j + \sum_{j=1}^{i-1} C'_j$. Pentru

$ih = \text{constant}$ rezultă $e_i = O(h^3)$, dar $e'_i = O(h^2)$ și astfel, ordinul global al metodei rămâne $p = 2$ ■

Operatorul în forma multi-pas. Ordinul 4.

Operatorul Newmark se poate pune în forma multi-pas, cum urmează. Pentru conveniență, scriem ecuația diferențială sub forma:

$$\ddot{u} = \varphi(u, \dot{u}, t)$$

și notăm: $\ddot{u}_0 = \varphi_0 = \varphi(u_0, \dot{u}_0, t_0)$, $\ddot{u}_1 = \varphi_1 = \varphi(u_1, \dot{u}_1, t_1)$. Formulele Newmark devin:

$$u_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \frac{1}{2}h^2\varphi_0 + \beta h^2(\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_0 + h\varphi_0 + \gamma h(\varphi_1 - \varphi_0)$$

Se consideră și

$$u_2 = u_1 + h\dot{u}_1 + \frac{1}{2}h^2\ddot{\varphi}_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Din acestea, avem:

$$u_1 - u_0 = h\dot{u}_0 + \frac{1}{2}h^2\ddot{\varphi}_0 + \beta h^2(\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$u_2 - u_1 = h\dot{u}_1 + \frac{1}{2}h^2\ddot{\varphi}_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\dot{u}_1 - \dot{u}_0 = h\ddot{\varphi}_0 + \gamma h(\varphi_1 - \varphi_0)$$

Scăzând prima relație din a doua, și înlocuind $\dot{u}_1 - \dot{u}_0$, rezultă

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2[\beta\ddot{\varphi}_2 + (\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\ddot{\varphi}_1 + (\frac{1}{2} + \beta - \gamma)\ddot{\varphi}_0] \quad (\text{a})$$

Analog, cu $\dot{u}_2 - \dot{u}_1 = h\ddot{\varphi}_1 + \gamma h(\varphi_2 - \varphi_1)$, se obține:

$$\dot{u}_2 - 2\dot{u}_1 + \dot{u}_0 = h[\gamma\ddot{\varphi}_2 + (1 - 2\gamma)\ddot{\varphi}_1 + (\gamma - 1)\ddot{\varphi}_0]. \quad (\text{b})$$

În cazul fără amortizare, ecuația este

$$\ddot{u} = \varphi(u, t)$$

și se poate utiliza numai ecuația (a).

Propoziția 3

Dacă nu există amortizare ($g(\dot{u}) = 0$), metoda Newmark cu $\gamma = \frac{1}{2}$, și

$$\beta = 1/12, \text{ are ordinul } p = 4 \blacksquare$$

Metoda cu $\beta = 1/12$ se mai zice formula Fox-Goodwin.

Pentru a proba concluzia, se consideră condițiile de ordin pentru operatori multi-pas pentru o ecuație diferențială de ordinul doi care nu conține amortizare, (v. Hairer et al., 1987), și anume:

$$d_0 = \sum_{l=0}^k a_l = 0 \quad (q = 0)$$

$$d_1 = \sum_{l=0}^k l a_l - \sum_{l=0}^k b_l = 0 \quad (q = 1)$$

$$d_q = \sum_{l=0}^k l^q a_l - q(q-1) \sum_{l=0}^k l^{q-2} b_l = 0, \quad q = 2, \dots, p+1$$

$$d_{p+2} = \sum_{l=0}^k l^{p+2} a_l - (p+2)(p+1) \sum_{l=0}^k l^p b_l \neq 0 \quad (q = p+2)$$

Ordinul operatorului (6) este numărul natural p pentru care avem

$$d_0 = 0, d_1 = 0, \dots, d_{p+1} = 0 \text{ și } d_{p+2} \neq 0.$$

Ele asigură că formula pentru u este exactă pentru un polinom de grad p , și nu mai este exactă pentru un polinom de grad $p+1$.

Astfel, pentru operatorul (a), punem condiția ca relațiile să fie verificate pentru

$q = 0, 1, \dots, 5$. Din acestea rezultă $\gamma = \frac{1}{2}$ și $\beta = \frac{1}{12}$; relația pentru $q = 6$ nu mai

este verificată. Rezultă că ordinul este $p = 4$.

Obsevație

Operatorul cu $\gamma = \frac{1}{2}$ este:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2 [\beta \varphi_2 + (1-2\beta)\varphi_1 + \beta \varphi_0]$$

În particular, pentru $\beta = 1/12$, aceasta devine:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = \frac{h^2}{12} [\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0]$$

(Acesta este metoda Numerov.)

■

2.2 Un operator de ordinul trei (generalizarea operatorului Newmark)

O familie de noi operatori, care generalizează operatorul Newmark a fost introdusă de autor – v. Chisăliță A. & Chisăliță F. (1990, 1998).

Formulele operatorului

Notăm, pentru simplificare, pasul curent și anterior cu indicii 1 și 0, respectiv (în loc de $i+1$ și i). Presupunem că funcția u satisface pe intervalul

$I = [t_0, t_1]$, $t_1 = t_0 + h$, una din următoarele condiții:

(1) \ddot{u} e derivabilă în $I - \{t_0\}$;

(2) \ddot{u} e continuă în t_0 și există \ddot{u}' , finită sau nu, în $I - \{t_0\}$.

Atunci, pentru orice întregi pozitivi p , p' și p'' , seria Taylor a funcțiilor u , \dot{u} și \ddot{u} , cu restul în forma Schlömilch-Roche (v. Nicolescu (1958)), este:

$$u(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0) + \beta h^3\ddot{u}'(t_0 + \theta h) \quad (50a)$$

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0) + \gamma h^2\ddot{u}'(t_0 + \theta' h) \quad (50b)$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta h\ddot{u}'(t_0 + \theta'' h) \quad (50c)$$

în care θ , θ' și $\theta'' \in (0,1)$ și sunt asociați cu p , p' and p'' , respectiv, și cu t_0 , iar coeficienții β , γ și δ sunt dați de:

$$\beta = \frac{(1-\theta)^{3-p}}{2p}, \quad \gamma = \frac{(1-\theta')^{2-p'}}{p'}, \quad \delta = \frac{(1-\theta'')^{1-p''}}{p''} \quad (51)$$

Dacă notăm cu \bar{u} și $\bar{\ddot{u}}$ seriile Taylor trunchiate din (50a, b), adică:

$$\bar{u}(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0)$$

$$\bar{\ddot{u}}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0),$$

ecuațiile (50) devin:

$$u(t_1) = \bar{u}(t_1) + \beta h^3\ddot{u}'(t_0 + \theta h) \quad (52a)$$

$$\dot{u}(t_1) = \bar{\ddot{u}}(t_1) + \gamma h^2\ddot{u}'(t_0 + \theta' h) \quad (52b)$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta h\ddot{u}'(t_0 + \theta'' h) \quad (52c)$$

Ecuațiile (52 a-c) reprezintă formulele generale pentru a deduce operatori de integrare directă. Aceasta se va face introducând ipoteze asupra variației \ddot{u}' pe intervalul $[t_0, t_1]$.

a) Operatorul Newmark

Să presupunem că

$$A1 \mid \ddot{u}(t) = \text{constant, pe } I = [t_0, t_1].$$

Atunci, notând

$$\Delta\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0), \quad (53)$$

avem

$$\ddot{u}(t) = \Delta\ddot{u}(t_1) / h. \quad (53')$$

Formulele operatorului Newmark se obțin din (52), scrise cu ipoteza (53'), și punând valorile calculate $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$, în locul celor exacte $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$. Pentru compatibilitate cu ipoteza A1, luăm $\delta = 1$ în (52c). Această valoare corespunde la alegerea $p'' = 1$ în (51). Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{u}_1 \quad (54a)$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{u}_1 \quad (54b)$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \Delta\ddot{u}_1 \quad (54c)$$

în care, funcțiile barate sunt seriile Taylor trunchiate (scrise cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}_0, \quad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0. \quad (54d)$$

Coeficienții β and γ sunt definiți de (51) și diferite alegeri ale lui p și p' conduc la diferite metode Newmark. De exemplu, pentru $p = 3$ și $p' = 2$, se obține metoda cu $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, fără a mai fi nevoie de estimarea lui θ și θ' .

Este de notat că pasul h trebuie să fie suficient de mic pentru ca ipoteza A1 să fie satisfăcută. De asemenea, după deducerea precedentă, toate metodele Newmark rezultă din ipoteza A1, echivalentă cu variația liniară a accelerației în intervalul I .

b) Un nou operator

Presupunem că

A2 | $\ddot{u}(t)$ variază *liniar* pe intervalul $I = [t_0, t_1]$

Notând

$$\Delta\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0), \quad (55)$$

ipoteza A2 conduce la

$$\ddot{u}(t_0 + \theta\Delta t) = \ddot{u}(t_0) + \theta\Delta\ddot{u}(t_1) \quad (55')$$

Formulele operatorului se obțin din (52), cu ipoteza (55'), și înlocuind valorile exacte cu cele calculate. Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^3 \ddot{u}_0 + \theta \beta h^3 \Delta \ddot{u}_1 \quad (56a)$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h^2 \ddot{u}_0 + \theta' \gamma h^2 \Delta \ddot{u}_1 \quad (56b)$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \delta h \ddot{u}_0 + \theta'' \delta h \Delta \ddot{u}_1 \quad (56c)$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \Delta \ddot{u}_1 \quad (56d)$$

în care funcțiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate (cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}_0, \quad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0. \quad (56e)$$

Coeficienții β , γ , δ și θ , θ' , θ'' se vor alege din condiția ca eroarea formulelor (56 a-d) să fie minimizată.

Formulele pentru un sistem:

$$\mathbf{U}_1 = \bar{\mathbf{U}}_1 + \beta h^3 \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta \beta h^3 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57a)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_1 = \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h^2 \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta' \gamma h^2 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57b)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta h \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta'' \delta h \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57c)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1 \quad (57d)$$

în care:

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_0 + h\dot{\mathbf{U}}_0 + \frac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{U}}_0, \quad \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \dot{\mathbf{U}}_0 + h\ddot{\mathbf{U}}_0. \quad (57e)$$

Integrarea ecuației (1, 2)

Fie ecuația (1),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t)$$

cu condițiile inițiale $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_0)$, $\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{U}}(t_0)$. Acestea, înlocuite în ecuația scrisă pentru $t = t_0$, conduc la

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{P}(t_0),$$

din care se determină $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$. Considerând ecuația (1) *derivată*, și scrisă pentru $t = t_0$, rezultă

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{P}}(t_0),$$

din care se determină $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$. S-au notat: \mathbf{B} și \mathbf{C} , jacobienii lui \mathbf{g} în raport cu \mathbf{U} și $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; \mathbf{A} este jacobianul lui \mathbf{f} ; v. (29b).

Pentru un sistem linear (2), avem $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C} = \text{constant}$, $\mathbf{A} = \mathbf{K}$ (constant).

Considerăm ecuația (1) scrisă pentru momentul $t_1 = t_0 + h$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_1) = \mathbf{P}(t_1) \quad (60)$$

și înlocuim $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1$ din (57). Notând, pentru claritate, $\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$, se obține ecuația neliniară:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0} \quad (61a)$$

unde:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{W}) = & \mathbf{M}\theta^n \delta h \mathbf{W} + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3 \mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3 \mathbf{W}) \\ & + \mathbf{M} \cdot \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 - \mathbf{P}(t_1) \end{aligned} \quad (61b)$$

În (60c) s-au pus:

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = \bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^3 \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (62a)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma(\Delta t)^2 \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (62b)$$

$$\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta(\Delta t)\ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (62c)$$

Ecuția (61) se rezolvă cu metoda Newton, iterația fiind definită de

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{(n+1)} &= \mathbf{W}^{(n)} + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \\ \mathbf{J}(\mathbf{W}^{(n)})\delta_{n+1} &= -\mathbf{F}(\mathbf{W}^{(n)}) \end{aligned} \quad (63a)$$

în care $\mathbf{J}(\mathbf{W}) = [\partial F_i / \partial W_j]$ este jacobianul lui \mathbf{F} , dat de:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{W}) &= \mathbf{M}\theta''\delta h + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta\beta h^3 \\ &+ \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta'\gamma h^2 + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W})\theta\beta h^3 \end{aligned} \quad (63b)$$

Iterația se încheie prin testele:

$$\|\delta_n\| \leq \varepsilon \quad \text{și} \quad \text{Număr de iterații} \leq LNIT \quad (64)$$

unde ε and $LNIT$ sunt alese dinainte.

Cu $\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ găsită ca mai sus, din (57 a-d) se calculează valorile $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1$, care sunt luate ca valori inițiale pentru pasul următor.

În particular, pentru un sistem liniar (2) ecuația (60) devine liniară în \mathbf{W} , și anume:

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{W} = \hat{\mathbf{P}},$$

unde

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\theta''\delta h + \mathbf{C}\theta'\gamma h^2 + \mathbf{K}\theta\beta h^3,$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M}\tilde{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}_1).$$

Eroarea de trunchiere locală și alegerea coeficienților

Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (57) când valorile calculate se înlocuiesc cu cele exacte. Astfel, avem:

- Eroarea în u :

Din (56a) se obține, notând eroarea de trunchiere cu T_1 :

$$u(t_1) = \bar{u}(t_1) + \beta h^3 \ddot{u}(t_0) + \theta\beta h^3 [\ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0)] + T_1$$

în care, avem:

$$\ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0) = hu^{(4)}(\xi), \quad t_0 < \xi < t_1. \quad (65)$$

Desvoltând $u(t_1)$ în serie Taylor, până la termenul de ordinul 4, avem:

$$u(t_1) = u(t_0) + hu'(t_0) + \frac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0) + \frac{1}{6}h^3\dddot{u}(t_0) + \frac{1}{24}h^4u^{(4)}(\eta)$$

unde $t_0 < \eta < t_1$. Cum primii trei termeni din membrul doi sunt $\bar{u}(t_1)$, rezultă:

$$T_1 = h^3\left(\frac{1}{6} - \beta\right)\ddot{u}(t_0) + h^4\left[\frac{1}{24}u^{(4)}(\eta) - \theta\beta u^{(4)}(\xi)\right]$$

Pentru a obține cel mai înalt ordin în T_1 , alegem:

$$\beta = \frac{1}{6}; \quad \theta\beta = \frac{1}{24} \Rightarrow \theta = \frac{1}{4}, \quad (66)$$

Presupunând că există $u^{(5)}$, avem $u^{(4)}(\eta) - u^{(4)}(\xi) = (\eta - \xi)u^{(5)}(\zeta)$, unde

$t_0 < \zeta < t_1$. Punând

$$C_1 = \frac{\eta - \xi}{h}u^{(5)}(\zeta)$$

obținem:

$$T_1 = h^5C_1 \quad (66')$$

Notând cu M_5 marginea lui $u^{(5)}$ pe intervalul $[t_0, t_1]$, adică

$$|u^{(5)}(t)| < M_5, \quad t \in [t_0, t_1]$$

și ținând cont că $|\eta - \xi|/h < 1$, rezultă că avem:

$$|C_1| < \frac{1}{24}M_5 \quad (66'')$$

- Eroarea în \dot{u} :

Notând eroarea de trunchiere cu T_1' , din (56b) se obține, ținând cont de (65):

$$\dot{u}(t_1) = \bar{\dot{u}}(t_1) + \gamma h^2\ddot{u}(t_0) + \theta'\gamma h^3u^{(4)}(\xi) + T_1'$$

Analog, dezvoltăm membrul întâi în serie Taylor până la termenul de ordinul trei,

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0) + \frac{1}{2}h^2\dddot{u}(t_0) + \frac{1}{6}h^3u^{(4)}(\eta'),$$

și rezultă:

$$T_1' = h^3\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\ddot{u}(t_0) + h^3\left[\frac{1}{6}u^{(4)}(\eta') - \theta'\gamma u^{(4)}(\xi)\right]$$

Pentru a obține cel mai mare ordin în T_1' , alegem:

$$\gamma = \frac{1}{2}; \quad \theta' \gamma = \frac{1}{6} \Rightarrow \theta' = \frac{1}{3}, \quad (67)$$

și avem $u^{(4)}(\eta') - u^{(4)}(\xi) = (\eta'_2 - \xi)u^{(5)}(\zeta')$, unde $t_0 < \zeta' < t_1$. Punem

$$C'_1 = \frac{\eta' - \xi}{h} u^{(5)}(\zeta')$$

și eroarea T'_1 devine:

$$T'_1 = h^4 C'_1 \quad (67')$$

unde

$$|C'_1| < \frac{1}{6} M_5 \quad (67'')$$

- Eroarea în \ddot{u} :

În mod analog, din (57c) și seria Taylor a lui $\ddot{u}(t_1)$, avem:

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta \ddot{u}(t_0) + \theta'' \delta h^2 u^{(4)}(\xi) + T''_1,$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + h \ddot{u}(t_0) + h^2 \frac{1}{2} u^{(4)}(\eta''),$$

de unde rezultă:

$$T''_1 = h(1 - \delta) \ddot{u}(t_0) + h^2 [\frac{1}{2} u^{(4)}(\eta'') - \theta'' \delta u^{(4)}(\xi)]$$

Cu alegerea

$$\delta = 1; \quad \theta'' \delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta'' = \frac{1}{2}, \quad (68)$$

rezultă $u^{(4)}(\eta'') - u^{(4)}(\xi) = (\eta'' - \xi)u^{(5)}(\zeta'')$, unde $t_0 < \zeta'' < t_1$. Punând

$$C''_1 = \frac{\eta'' - \xi}{h} u^{(5)}(\zeta'')$$

eroarea T''_1 ia forma

$$T''_1 = h^3 C''_1 \quad (68')$$

unde

$$|C''_1| < \frac{1}{2} M_5 \quad (68'')$$

Eroarea de trunchiere globală și ordin

Revenind la pasul general $i \geq 1$, rezultatele anterioare (66'-68') se scriu:

$$\begin{aligned} T_i &= h^5 C_i, & |C_i| &< \frac{1}{24} M_5 \\ T'_i &= h^4 C'_i, & |C'_i| &< \frac{1}{6} M_5 \\ T''_i &= h^3 C''_i, & |C''_i| &< \frac{1}{2} M_5 \end{aligned} \quad (69)$$

unde $|u^{(5)}(t)| < M_5$, $t \in [t_0, TT]$.

Definim eroarea de trunchiere globală prin:

$$e_i = u(t_i) - u_i; \quad e'_i = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i; \quad e''_i = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i; \quad e'''_i = \dddot{u}(t_i) - \dddot{u}_i \quad (70)$$

Întrucât valorile inițiale $u_0, \dot{u}_0, \ddot{u}_0, \dddot{u}_0$, ale soluției calculate, se iau egale cu cele exacte – v. 3.3.2, avem:

$$e_0 = 0, \quad e'_0 = 0, \quad e''_0 = 0, \quad e'''_0 = 0 \quad (70')$$

Cu $\beta = \frac{1}{6}$, $\beta\theta = \frac{1}{24}$; $\gamma = \frac{1}{2}$, $\theta'\gamma = \frac{1}{6}$; $\delta = 1$, $\theta''\delta = \frac{1}{2}$, formulele (56) ale operatorului devin:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + h\dot{u}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{u}_i + \frac{h^3}{8}\dddot{u}_i + \frac{h^3}{24}\ddot{\ddot{u}}_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + h\ddot{u}_i + \frac{h^2}{3}\dddot{u}_i + \frac{h^2}{6}\ddot{\ddot{u}}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1} &= \ddot{u}_i + \frac{h}{2}\dddot{u}_i + \frac{h}{2}\ddot{\ddot{u}}_{i+1} \end{aligned} \quad (71)$$

Procedând ca la operatorul Newmark, se obține:

$$e'''_i = h^2 A'''_i + h^3 B'''_i \quad (78a)$$

$$e''_i = h^4 B''_i \quad (78b)$$

$$e'_i = h^4 A'_i + h^5 B'_i \quad (78c)$$

$$e_i = h^5 A_i + h^6 B_i \quad (78d)$$

Relațiile (78) conduc la următoarea propoziție:

Propoziția 1

Operatorul cu coeficienții $\beta = \frac{1}{6}, \theta = \frac{1}{4}; \gamma = \frac{1}{2}, \theta' = \frac{1}{3}; \delta = 1, \theta'' = \frac{1}{2}$, are ordinul $p = 3$ ■

Propoziția 1 se demonstrează arătând că pentru $ih = c = \text{constant}$, rezultă:

$$e'_i = O(h^3) \quad (*)$$

$$e_i = O(h^3) \quad (**)$$

■

Observație

Cu (*) și (**), rezultă și: $e''_i = O(h^3); e'''_i = O(h)$.

■

Cazul fără amortizare. Ordinul 4.

Propoziția 2

Dacă nu există amortizare, operatorul cu coeficienții $\beta = \frac{1}{6}, \theta = \frac{1}{4};$

$\gamma = \frac{1}{2}, \theta' = \frac{1}{3}$ și $\delta = 1, \theta'' = \frac{1}{2}$, are ordinul $p = 4$ ■

Aceasta se probează punând operatorul sub forma multi-pas, și anume, se obține:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2 \frac{1}{12} [\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0].$$

Formula coincide cu cea a operatorului Newmark, pentru $\gamma = \frac{1}{2}$ și $\beta = \frac{1}{12}$.

■

Stabilitatea operatorului (stabilitatea liniară)

Tratăm stabilitatea pentru sistemul liniar (2) și presupunem că aceasta se decuplează în forma (5). Aceasta revine la a discuta stabilitatea pentru o singură ecuație de forma

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2x = p(t) \quad (80)$$

Forma matriceală a operatorului

Să notăm cu

$$\mathbf{X}(t) = [u(t) \quad \dot{u}(t) \quad \ddot{u}(t) \quad \dddot{u}(t)]^T \quad (81)$$

Formulele operatorului – ecuațiile (57) – iau forma

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{S}_0 \mathbf{X}_0 + \mathbf{R}_0 \Delta \ddot{u}_1 \quad (82a)$$

unde

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h^2 & h^3\beta \\ 0 & 1 & h & h^2\gamma \\ 0 & 0 & 1 & h\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (82b)$$

și

$$\mathbf{R}_0 = [\beta h^3 \quad \gamma h^2 \quad \delta h \quad 1]^T \quad (82c)$$

În (82c) s-a notat

$$\beta' = \beta\theta, \quad \gamma' = \gamma\theta', \quad \delta' = \delta\theta'' \quad (82d)$$

Ecuația (80) se pune în forma matricelă

$$\mathbf{E}\mathbf{X} = p(t) \quad (83)$$

unde:

$$\mathbf{E} = [\omega^2 \quad 2\zeta\omega \quad 1 \quad 0].$$

Considerând acum (83) scrisă pentru $t = t_1$ și punând $p_1 = p(t_1)$, rezultă

$\mathbf{E}\mathbf{X}_1 = p_1$, și înlocuind din (82a) rezultă

$$\mathbf{E}\mathbf{S}_0 \mathbf{X}_0 + \mathbf{E}\mathbf{R}_0 \Delta \ddot{u}_1 = p_1 \quad (84)$$

Calculând produsul $\mathbf{E}\mathbf{R}_0$ avem

$$\mathbf{E}\mathbf{R}_0 = ah,$$

unde

$$a = \beta'x^2 + 2\zeta\gamma'x + \delta'; \quad x = \omega h = 2\pi(h/T). \quad (85)$$

$T = 2\pi/\omega$ notează perioada răspunsului fără amortizare.

Rezolvând (84) în raport cu $\Delta\ddot{u}_1$ se obține $\Delta\ddot{u}_1 = (p_1 - \mathbf{ES}_0\mathbf{X}_0)/ah$ care, substituită în (81a) conduce la ecuația matriceală a operatorului:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{S}\mathbf{X}_0 + \mathbf{R}p_1 \quad (86)$$

S-a notat:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 / (ah)$$

Matricea \mathbf{S} a operatorului este dată de

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 - \mathbf{R}\mathbf{E}\mathbf{S}_0 \quad (87)$$

Calculând \mathbf{S} și aplicându-i transformarea de similaritate de finită de

$$\mathbf{S}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{D}, \quad \mathbf{D} = \text{diag}[h^{4-i}]_{i=1,4} \quad (88)$$

obținem următoarea structură a matricii \mathbf{S}' :

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} 1 - \beta'c_1 & 1 - \beta'c_2 & \frac{1}{2} - \beta'c_3 & \beta - \beta'c_4 \\ -\gamma'c_1 & 1 - \gamma'c_2 & 1 - \gamma'c_3 & \gamma - \gamma'c_4 \\ -\delta'c_1 & \delta'c_2 & 1 - \delta'c_3 & \delta - \delta'c_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 1 - c_4 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Coefficienții c_i sunt definiți de:

$$c_1 = x^2 / a, \quad c_2 = (x^2 + 2\zeta x) / a, \quad c_3 = (x^2 + 2\zeta x + 1) / a,$$

$$c_4 = (\beta x^2 + 2\zeta x + \delta) / a \quad (89a)$$

Criteriul de stabilitate

Considerăm formula de recurență (86) scrisă pentru momentul general $t = t_{i+1}$:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{X}_i + \mathbf{R}p_{i+1}, \quad i \geq 0$$

Aplicată succesiv pentru $i = 0, 1, \dots, n-1$, se obține:

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{X}_0 + (p_1\mathbf{S}^{n-1} + p_2\mathbf{S}^{n-2} + \dots + p_n\mathbf{I})\mathbf{R} \quad (90)$$

în care $p_j = p(t_j)$, iar \mathbf{I} este matricea unitate.

Să presupunem că, condiția inițială \mathbf{X}_0 este afectată de o eroare \mathbf{d} , astfel că în loc de \mathbf{X}_0 avem:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{d}$$

Soluția calculată cu condiția inițială \mathbf{Y}_0 va fi dată de (90), fie aceasta

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{S}^n \mathbf{Y}_0 + (p_1 \mathbf{S}^{n-1} + p_2 \mathbf{S}^{n-2} + \dots + p_n \mathbf{I}) \mathbf{R} \quad (91)$$

Scăzând (91) din (90) avem eroarea

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n \mathbf{d}$$

Definiție

Operatorul se zice *stabil* dacă eroarea \mathbf{e}_n rămâne mărginită pentru $\forall n$ ■

Pentru a analiza această condiție, vom considera forma Jordan a matricii \mathbf{S} . Vom

nota cu $\lambda_i, i = \overline{1, r}$ valorile proprii ale lui \mathbf{S} , acestea sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}).$$

O rădăcină λ_i poate fi simplă, sau multiplă de ordinul $k_i, k_i > 1$. Dacă λ_i este

multiplă de ordinul k_i , vom presupune că există k_i vectori proprii liniar

independenți asociați cu λ_i (pentru cazul în care ipoteza nu este realizată vezi

Observația de mai jos). Cu aceasta rezultă că matricea \mathbf{S} – presupusă $m \times m$ – are m

vectori proprii liniar independenți și este similară cu o matrice diagonală (v.

Barnett & Storey (1970)). Adică, există o matrice nesingulară \mathbf{T} , astfel că

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1}, \quad (92)$$

în care \mathbf{J} este forma Jordan, dată de

$$\mathbf{J} = \text{diag}[\lambda_i]. \quad (93)$$

Dacă λ_i este multiplă de ordinul k_i , atunci ea se repetă de k_i ori pe diagonala lui

\mathbf{J} . Avem $\mathbf{S}^n = \mathbf{T} \mathbf{J}^n \mathbf{T}^{-1}$, unde $\mathbf{J}^n = \text{diag}[\lambda_i^n]$. Notând $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{d}'$, rezultă

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{S}^n \mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{J}^n \mathbf{d}'.$$

Astfel, coordonata j a vectorului \mathbf{e}_n va fi dată

$$e_n^{(j)} = \sum_{i=1}^r t_{ji} \lambda_i^n d'^{(i)}$$

Pentru a avea $\forall n \quad |e_n^{(j)}| \leq M_j$, este necesar și suficient ca

$$1) \quad |\lambda_i| \leq 1, \quad i = \overline{1, r} \quad (94)$$

sau

$$1') \quad \rho(\mathbf{S}) \leq 1 \quad (95)$$

unde $\rho(\mathbf{S}) = \max_i |\lambda_i|$ este raza spectrală a lui \mathbf{S} .

Dacă inegalitatea în (94, 95) este strictă, adică $\rho(\mathbf{S}) < 1$, atunci rezultă

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{e}_n \rightarrow \mathbf{0}.$$

Observație

În cazul când λ_i este multiplă de ordinul k_i și îi corespund $\bar{k}_i < k_i$ vectori proprii liniar independenți, atunci \mathbf{S} este similară cu o matrice bloc-diagonală. Adică (92) are loc, cu \mathbf{J} dat de

$$\mathbf{J} = \text{diag}[\mathbf{j}_{k_1}(\lambda_1) \quad \mathbf{j}_{k_2}(\lambda_2) \quad \dots \quad \mathbf{j}_{k_r}(\lambda_r)],$$

în care: $\mathbf{j}_k(\lambda)$ este blocul Jordan (matrice $k \times k$)

$$\mathbf{j}_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad (96)$$

$\mathbf{j}_1(\lambda) = \lambda$ (matrice 1×1), și unde: $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$, iar λ_i nu sunt în mod necesar distincte. De exemplu, în cazul unei matrici 4×4 la care $\lambda_1 = \lambda_2$ și λ_3, λ_4 sunt simple, iar lui λ_1 îi corespunde un singur vector propriu liniar independent, forma Jordan este:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Pentru blocurile Jordan se verifică, prin inducție, că avem:

$$(\mathbf{j}_2(\lambda_1))^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & C_n^1 \lambda_1^{n-1} \\ & \lambda_1^n \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{j}_3(\lambda_1))^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & C_n^1 \lambda_1^{n-1} & C_n^2 \lambda_1^{n-2} \\ & \lambda_1^n & C_n^1 \lambda_1^{n-1} \\ & & \lambda_1^n \end{bmatrix}; \text{ etc.},$$

în care C_n^k sunt coeficienții binomiali.

Astfel, pentru exemplul de mai sus (λ_1 dublă), coordonatele lui \mathbf{e}_n sunt:

$$e_n^{(j)} = c_{j1} \lambda_1^n + n c_{j2} \lambda_1^{n-1} + c_{j3} \lambda_3^n + c_{j4} \lambda_4^n$$

unde c_{ij} sunt coeficienți numerici. Rezultă că, pentru a avea $\forall n \quad |e_n^{(j)}| \leq M_j$, pe lângă condiția 1 din (95), mai trebuie să avem:

$$2) \text{ Dacă } |\lambda_i| = 1, \text{ atunci } \lambda_i \text{ să nu genereze un bloc Jordan (96).} \quad (97)$$

În particular, condiția 2 este realizată dacă λ_i este rădăcină simplă.

■

Stabilitatea

Întrucât \mathbf{S} and \mathbf{S}' au aceleași valori proprii, lucrăm cu matricea \mathbf{S}' . Polinomul caracteristic al lui \mathbf{S}' poate fi pus sub forma:

$$p_1(\lambda) = \frac{1}{a} \cdot \lambda \cdot q(\lambda) \quad (98)$$

unde $q(\lambda)$ este un polinom de gradul 3. Polinomul $q(\lambda)$ din (92) este dat de:

$$q(\lambda) = d_0 \lambda^3 + d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda + d_3 \quad (99)$$

Utilizând coeficienții operatorului $\beta = \frac{1}{6}$, $\beta\theta = \frac{1}{24}$; $\gamma = \frac{1}{2}$, $\theta'\gamma = \frac{1}{6}$;

$\delta = 1$, $\theta''\delta = \frac{1}{2}$, rezultă:

$$a = \frac{1}{24} x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \zeta x; \quad x = \omega \cdot h, \quad (100a)$$

Punând:

$$a_0 = \frac{1}{24} x^2 + \frac{1}{2} \quad (100b)$$

coeficienții polinomului $q(\lambda)$ sunt dați de:

$$d_0 = a_0 + \frac{1}{3} \zeta x, \quad d_1 = \frac{1}{2} x^2 - a_0 + \zeta x, \quad d_2 = \frac{1}{2} x^2 - a_0 - \zeta x,$$

$$d_3 = a_0 - \frac{1}{3}\zeta x \quad (100c)$$

Criteriul de stabilitate este (95). Se observă că întotdeauna există o valoare proprie $\lambda = 0$ (matricea \mathbf{S} este singulară).

a) Sistem fără amortizare ($\zeta = 0$)

Ecuția $p(\lambda) = 0$ ia forma:

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2b\lambda + 1) = 0, \quad (101)$$

unde

$$b = \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2}.$$

Avem astfel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, iar λ_3, λ_4 sunt rădăcinile ecuației de gradul 2:

$$\lambda^2 - 2b\lambda + 1 = 0. \quad (102)$$

Avem $\lambda_3\lambda_4 = 1$, astfel că ecuația (102) trebuie să aibă numai rădăcini complexe (acestea sunt de modul 1), ceea ce conduce la:

$$x^2 < 6, \quad \text{sau} \quad \frac{h}{T} < \frac{\sqrt{6}}{2\pi} = 0.389848 \quad (103)$$

Aceasta este limita de stabilitate pentru raportul h/T (lungime pas/periodă).

b) Sistem cu amortizare ($\zeta \neq 0$). Operatorul cu mediere.

Utilizând criteriul Routh-Hurwitz (v. Hairer & al. (1987)), se poate arăta că pentru $\zeta \neq 0$ operatorul este *instabil* pentru orice pas h . Procesul descris mai jos, numit “medierea asupra lui \ddot{u} ”, va asigura stabilitatea operatorului pentru sisteme liniare cu amortizare. Presupunem $p(t)$ derivabil pe intervalul $[t_0, t_1]$. Atunci, derivând ecuația de mișcare (80) avem:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = \dot{p}(t) \quad (104)$$

Susbtituind în (104), scrisă pentru $t = t_1$, valorile u_1, \dot{u}_1 și \ddot{u}_1 calculate din (52a-c), se obține o nouă valoare a lui $\ddot{u}(t_1)$, fie aceasta:

$$\ddot{u}_1^{(1)} = -\omega^2 \dot{u}_1 - 2\zeta\omega \ddot{u}_1 + \dot{p}(t_1) \quad (105)$$

Dacă valorile $u_1, \dot{u}_1, \ddot{u}_1$ ar fi exacte, atunci \ddot{u}_1 dat de (56d) ar fi egal cu $\ddot{u}_1^{(1)}$ dat de (105). Media cu ponderea $\nu, 0 < \nu < 1$, a acestor două valori, se va lua ca nouă aproximație a lui $\ddot{u}(t_1)$, adică:

$$\ddot{u}_1^{(m)} = \nu \ddot{u}_1 + (1 - \nu) \ddot{u}_1^{(1)} \quad (106)$$

Notând cu

$$\mathbf{X}_1^{(m)} = [u_1 \quad \dot{u}_1 \quad \ddot{u}_1 \quad \ddot{u}_1^{(m)}]^T \quad (107)$$

ecuația operatorului cu mediere ia forma

$$\mathbf{X}_1^{(m)} = \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{X}_0 + \mathbf{R}^{(m)} \quad (108)$$

în care $\mathbf{S}^{(m)}$ are următoarea structură:

$$\mathbf{S}^{(m)} = \begin{bmatrix} & & & \mathbf{S}_1 \\ & & & \mathbf{S}_2 \\ & & & \mathbf{S}_3 \\ \nu \mathbf{S}_4 + (1 - \nu)(-\omega^2 \mathbf{S}_2 - 2\zeta\omega \mathbf{S}_3) & & & \end{bmatrix} \quad (109)$$

În (109), \mathbf{S}_i notează linia “ i ” a matricii \mathbf{S} . Notând cu $\mathbf{S}'^{(m)} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{D}$, matricea

$\mathbf{S}'^{(m)}$ va avea structura din (89), înlocuind ultima linie cu

$$\nu \mathbf{S}'_4 + (1 - \nu)(-\omega^2 \mathbf{S}'_2 - 2\zeta\omega \mathbf{S}'_3) - \text{unde } \mathbf{S}'_i \text{ este linia “}i\text{” a matricii } \mathbf{S}'.$$

Polinomul caracteristic al matricii $\mathbf{S}'^{(m)}$ este dat de:

$$p_1^{(m)}(\lambda) = \frac{1}{a} \lambda [\nu q(\lambda) + (1 - \nu)r(\lambda)]$$

Pentru $\nu = 1$, $p_1^{(m)}(\lambda)$ devine polinomul caracteristic al matricii \mathbf{S}' - dat de (98).

Polinomul $q(\lambda)$ este definit de (99, 100), iar polinomul $r(\lambda)$ este dat de:

$$r(\lambda) = f_0 \lambda^3 + f_1 \lambda^2 + f_2 \lambda + f_3$$

unde:

$$f_0 = \frac{1}{24} x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \zeta x$$

$$f_1 = -\frac{1}{144} x^4 + \frac{5}{12} x^2 - 1 - \frac{1}{12} \zeta x^3 - \frac{1}{3} \zeta^2 x^2 + \frac{1}{3} \zeta x$$

$$f_2 = \frac{1}{144} x^4 + \frac{1}{24} x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \zeta x^3 + \frac{1}{3} \zeta^2 x^2 - \frac{2}{3} \zeta x$$

$$f_3 = 0$$

În Figura 1 de mai jos, se dă raza spectrală $\rho^{(m)}$ a matricii $\mathbf{S}^{(m)}$ pentru $\nu = 0.5$, pentru rapoarte de amortizare ζ în plaja $0.0 \dots 0.9$, reprezentată în funcție de raportul h/T (unde T este perioada sistemului fără amortizare). Valoarea h/T pentru care $\rho^{(m)} = 1$ este limita de stabilitate pentru valoarea ζ respectivă.

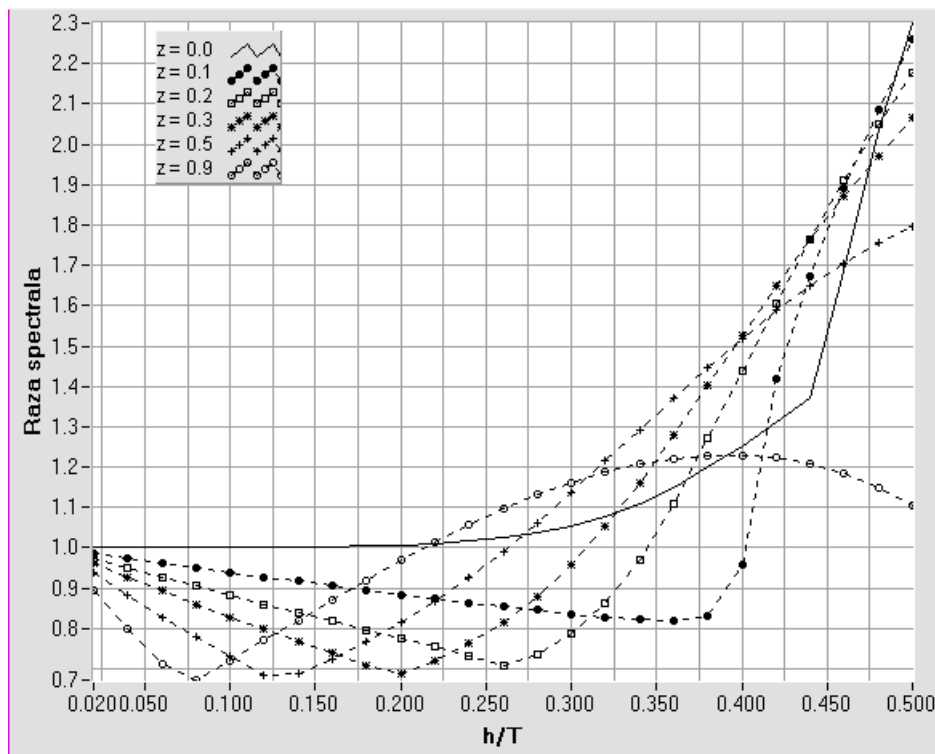


Fig. 1 – Raza spectrală pentru $\nu = 0.5$, pentru diferite rapoarte de amortizare $\zeta = z$

În Figura 2 se dă limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru $\nu = 0.5$ și $\nu = 0.9$, reprezentată în funcție de ζ .

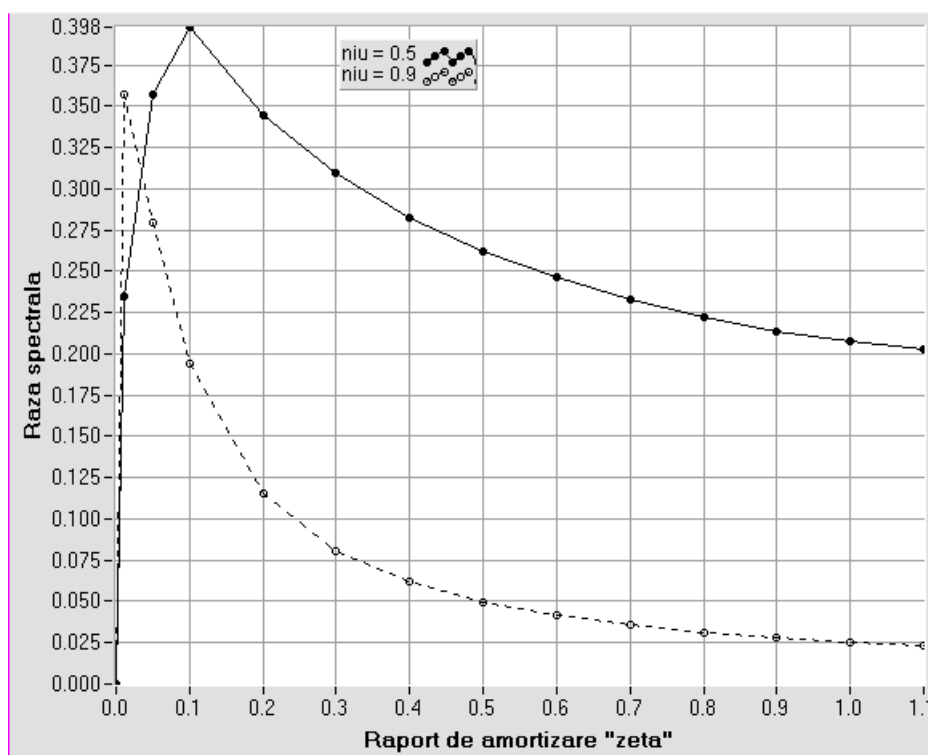


Fig. 2 – Limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru $\nu = 0.5$ și $\nu = 0.9$

Din Figura 2 se poate observa că, pentru o valoare dată ζ , limita de stabilitate descrește pe măsură ce ν ($\nu < 1$) se apropie de 1. Teste numerice (pentru sisteme liniare cu amortizare) au arătat că, valori ν apropiate de 1 oferă o precizie mai mare, dar mărimea pasului este limitată de raza spectrală. O valoare care convine este $\nu = 0.5$, adică în (106) se ia *media aritmetică* a celor două valori.

Medierea pentru $\zeta = 0$:

Utilizând polinomul caracteristic al lui $S^{(m)}$ și criteriul Routh-Hurwitz, se poate arăta analitic, că operatorul cu mediere este instabil pentru orice ν și orice h . În particular, pentru $\nu = 0.5$, aceasta se observă pe graficul din Figura 1, pentru $z = 0$: avem $\rho \geq 1$. În consecință, medierea asupra lui \ddot{u} se va utiliza *pentru și numai pentru* sisteme cu amortizare.

Observație

Pentru un sistem (2), medierea asupra lui \ddot{U} se obține pe aceeași cale ca mai sus.

Derivând ecuația (2) se obține $\mathbf{M}\ddot{U} + \mathbf{B}(\dot{U})\dot{U} + \mathbf{A}(U)\dot{U} = \dot{\mathbf{P}}(t)$, și înlocuind

U_1, \dot{U}_1 și \ddot{U}_1 din (57 a-c) avem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \dot{\mathbf{P}}(t_1) - \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}_1)\ddot{\mathbf{U}}_1 - \mathbf{A}(\mathbf{U}_1)\dot{\mathbf{U}}_1$$

care se rezolvă în raport $\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)}$. Mediarea este dată de:

$$\ddot{\mathbf{U}}_1^{(m)} = \nu\ddot{\mathbf{U}}_1 + (1-\nu)\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)}$$

unde $\ddot{\mathbf{U}}_1$ este dat de (57d)

■

Exemplu de test – problema celor două corpuri

Următoarea problemă, constituită de problema celor două corpuri în cazul mișcării eliptice, este luată ca test pentru metodele de integrare numerică a problemei cu valori inițiale – v. Dormand and Prince (1978), Brankin and Gladwell (1994).

Problema consideră mișcarea relativă a două puncte materiale care interacționează prin legea atracției universale, și este descrisă, în coordonate carteziene, de sistemul de ecuații diferențiale:

$$\ddot{x} = -x/r^3, \quad \ddot{y} = -y/r^3,$$

în care $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Se consideră condițiile inițiale pentru cazul mișcării eliptice $x(0) = 1 - e$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}$,

în care $e < 1$. Soluția analitică este dată de:

$$x = \cos u - e, \quad y = \sqrt{1-e^2} \sin u, \quad \dot{x} = \frac{-\sin u}{1-e \cos u}, \quad \dot{y} = \frac{\sqrt{1-e^2} \cos u}{1-e \cos u}$$

în care u se determină din ecuația lui Kepler: $u - e \sin u = t$. Soluția este periodică cu perioada minimă $T = 2\pi$, iar orbita este o elipsă cu excentricitatea e și semi-axa mare egală cu 1. Problema reprezintă un test sever, datorită periodicității soluției. Pentru rezolvarea numerică – cu o metodă pentru ecuații de ordinul întâi, sistemul dat se transformă într-un sistem echivalent de 4 ecuații de ordinul întâi:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = w, \quad \dot{v} = -x/r^3, \quad \dot{w} = -y/r^3; \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

cu condițiile inițiale: $x(0) = 1 - e$, $y(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}$.

Calculăm soluția pe intervalul $[0, 20]$, adică peste trei perioade, pentru valorile $e = 0.1$ și $e = 0.9$ ale excentricității.

■

Considerăm cazul $e = 0.9$, acesta fiind testul cel mai sever. Integrăm cu noul operator, cu coeficienții: $\beta = \frac{1}{6}$, $\beta\theta = \frac{1}{24}$; $\gamma = \frac{1}{2}$, $\theta'\gamma = \frac{1}{6}$; $\delta = 1$, $\theta''\delta = \frac{1}{2}$ – formulele (56) și luând: $eps = 1E-6$, $lnit = 3$. Codul utilizat este cel dat în ANA_EcDif. Comparația rezultatelor cu cele obținute prin metoda RK4 (pas constant) se dă în tabelul următor.

$e = 0.9$, Erori absolute extreme la $t = 18.849$ (18.84 – pentru $h = 0.01$; 0.005).

Pasul h	RK4		Noul Operator	
	Eroarea absolută		Eroarea absolută	
	Maximă (\dot{x})	Minimă (x)	Maximă (\dot{x})	Minimă (x)
0.01 [†]	3.52 D0	3.54 D-1	1.58 D0	5.93 D-2
0.005	7.12 D-1	4.26 D-3	1.42 D-1	1.68 D-3
0.001	6.02 D-4	3.33 D-7	2.63 D-3	1.47 D-7
0.0005	3.28 D-5	1.82 D-8	1.64 D-5	9.13 D-9
0.0001	4.64 D-8	1.19 D-11	2.72 D-8	6.98 D-12

[†] Eroarea maximă are loc în \dot{y} .

Observații

- După cum se observă din tabel, erorile sunt cca. 1/2 din cele ale metodei RK4.
- Convergența iterației în metoda Newton (subrutina NewOp) este rapidă: de exemplu, pentru $h = 0.001$, după 2 iterații valorile normei corecției (δ_{w}) sunt de ordinul $10^{-13} \dots 10^{-14}$, sau chiar 0.0 (cu excepția primelor momente când au ordinul $10^{-8} \dots 10^{-12}$) ■