CURS 4

METODE NUMERICE PENTRU PROBLEMA DE VALORI PROPRII

Partea III

Problema generalizată de valori proprii.

1 Problema generalizată

1.1 Problema

Problema determinării valorilor şi vectorilor proprii ai unei matrici **A**, definită de $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, sau de ecuaţia

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

se va numi problema *standard*.

În Dinamica Structurilor apare următoarea problemă:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

unde:

$\lambda = \omega^2$; ω este pulsaţia proprie;

K este matricea de rigiditate;

M matricea de masă sau de inerţie;

K şi **M** sunt matrice simetrice şi pozitiv definite.

Problema (2) se zice problema *generalizată* de valori proprii. Mai general considerând două matrici $n \times n$ **A** şi **B**, unde **B** este nesingulară, problema generalizată are forma

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2'}$$

În continuare, vom trata problema (2).

1.2 Reducerea la problema standard

Problema (2) poate fi adusă la problema standard (1), prin înmulţirea la stânga a ecuaţiei (2) cu matricea $\mathbf{K}^{-1}$ şi notând $\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$, adică,

$$(\mathbf{D} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Dezavantajul acestei formulări este că, în general, matricea **D** nu mai este simetrică şi astfel, metodele pentru matrici simetrice (de exemplu, Jacobi, iteraţii simultane) – nu mai pot fi utilizate.

Pe de altă parte:

- Valorile proprii ale unei matrici simetrice sunt bine-condiţionate, pe când cele ale unei matrici nesimetrice pot fi rău-condiţionate.
- La utilizarea metodei QR, numărul de operaţii (pe un pas al iteraţiei QR) pentru o matrice simetrică este mult mai mic decât pentru o matrice generală.

Ţinând cont de definirea pozitivă a matricii **M**, problema generalizată (2) poate fi transformată în problema standard pentru o matrice simetrică cum urmează.

1. Se face descompunerea Cholesky a lui **M**:

$$\underline{\mathbf{M} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}}, \tag{3}$$

unde **S** este o matrice superior triunghiulară. (Descompunerea inferior triunghiulară poate fi de asemenea utilizată). Atunci, (2) scrisă în forma

$$\mathbf{Kx} = \lambda\mathbf{Mx} \tag{4}$$

devine $\mathbf{Kx} = \lambda\mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{x}$, şi se scrie din nou ca şi

$$\mathbf{KS}^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{x}).$$

2. Se notează

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x} \tag{5}$$

şi ecuaţia precedentă devine

$$\mathbf{KS}^{-1}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{S}^T\mathbf{y}.$$

Premultiplicând cu $(\mathbf{S}^T)^{-1} = (\mathbf{S}^{-1})^T = \mathbf{S}^{-T}$ (ultima egalitate este o notaţie), obţinem

$\mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{y}$

3. Acum, definim

$$\underline{\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1}} \tag{6}$$

R este o matrice *simetrică şi pozitiv definită* – v. mai jos.

4. Problema (2) devine problema standard pentru matricea **R**, şi anume,

$$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Problemele (7) şi (2) au aceleaşi valori proprii.

5. Dupa rezolvarea lui (7) pentru λ şi **y**, vectorii proprii ai problemei originale (2) sunt daţi (v. (5)) de

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} \tag{8}$$

■

Se verifică imediat că matricea **R** este simetrică şi pozitiv definită, la fel cum sunt matricile **M** şi **K**. Într-adevăr, avem:

$$\mathbf{R}^T = (\mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1})^T = \mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}^T\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{R}$$

Apoi, pentru orice $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, avem:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1})\mathbf{x} = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x})^T\mathbf{K}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} > 0,$$

întrucât $\mathbf{u} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$ este arbitrar şi nonzero, la fel ca şi **x**.

Urmează că valorile proprii ale lui **R** sunt reale şi pozitive, aşa cum trebuie să avem conform cu $\lambda_i = \omega_i^2$. Astfel, pentru a rezolva (7), orice metodă pentru problema de valori proprii ale unei matrici simetrice şi pozitiv definite poate fi aplicată lui **R**.

Observaţie

Cel mai simplu caz este acela în care matricea **M** este diagonală (model de mase concentrate):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n \end{bmatrix} = diag(m_i)$$

Atunci, avem

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & & & \\ & \sqrt{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{m_n} \end{bmatrix} = diag(\sqrt{m_i}) \text{, şi}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m_1}} & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{m_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{m_n}} \end{bmatrix} = diag(1/\sqrt{m_i}) .$$

Astfel, elementele lui **R** şi **x** sunt date de**:**

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}}, \quad i, j = \overline{1,n},$$

şi

$$x_i = \frac{y_i}{\sqrt{m_i}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Dacă **M** nu este diagonală: notând $\mathbf{Z} = \mathbf{S}^{-1}$, matricea **Z** se calculează uşor din $\mathbf{S}\mathbf{z}^{(j)} = \mathbf{e}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$ prin substituţie înapoi, întrucât **S** este superior triunghiulară. Apoi, $\mathbf{R} = \mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}$ şi $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{y}$.

■

Exemplu-I (Soluția analitică)

Fie matricile:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2.5\end{bmatrix};\qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&3&-2\\0&-2&6\end{bmatrix}$$

Avem:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1&&\\&\sqrt{2}&\\&&\sqrt{2.5}\end{bmatrix};\qquad \mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1&&\\&1/\sqrt{2}&\\&&1/\sqrt{2.5}\end{bmatrix}$$

Rezultă:

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1&-1/\sqrt{2}&0\\-1/\sqrt{2}&1.5&-2/\sqrt{5}\\0&-2/\sqrt{5}&2.4\end{bmatrix}$$

Rezolvarea analitică pentru problema standard pentru **R**, se dă în continuare. Polinomul caracteristic al lui **R** este

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1/\sqrt{2}&0\\-1/\sqrt{2}&1.5-\lambda&-2/\sqrt{5}\\0&-2/\sqrt{5}&2.4-\lambda\end{vmatrix}$$

Valorile proprii ai lui **R** se pot calcula rezolvând ecuaţia caracteristică

$p(\lambda)=-\lambda^3+4.9\lambda^2-6.2\lambda+1.6=0$.

Se obţine (în simplă precizie):

$\lambda_1 = 3.025604$; $\lambda_2 = 1.528400$; $\lambda_3 = 0.3459958$.

Vectorii proprii se determină din sistemul liniar şi omogen (7)

$$(\mathbf{R}-\lambda I)\cdot\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1-\lambda&-\sqrt{2}/2&0\\-\sqrt{2}/2&1.5-\lambda&-2/\sqrt{5}\\0&-2/\sqrt{5}&2.4-\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=0,$$

punând pe rând $\lambda=\lambda_i$, şi rezolvând sistemul. Spre exemplu, găsim soluţiile ca fiind proporţionale cu complemenţii algebrici ai elementelor unei linii, să zicem linia 3:

$$\frac{y_1}{R_{31}} = \frac{y_2}{R_{32}} = \frac{y_3}{R_{33}}$$

Se obține:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sqrt{2/5} \\ (2/\sqrt{5})(1-\lambda) \\ \lambda^2 - 2.5\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

Sau, împărţind cu prima coordonată

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}(1-\lambda) \\ \sqrt{2.5}(\lambda^2 - 2.5\lambda + 1) \end{bmatrix}$$

Cu acesta, se obţine

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1/\sqrt{2.5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}(1-\lambda) \\ \sqrt{2.5}(\lambda^2 - 2.5\lambda + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\lambda \\ \lambda^2 - 2.5\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

În fine, se obțin $\mathbf{x}^{(i)}$, făcând $\lambda = \lambda_i$ în **x**. De exemplu, avem:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.025604 \\ 2.590270 \end{bmatrix}$$

Sau, normat în norma-2:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2909563 \\ -0.5893622 \\ 0.7536554 \end{bmatrix}$$

■

1.3 Ortogonalitate

Se poate arăta că vectorii proprii **x** ai problemei (2), sunt ortogonali relativ la ambele matrici **K** şi **M**.

1) **M**-ortogonalitate:

Vectorii **y** sunt ortogonali, adică,

$\mathbf{y}^{(i)T}\mathbf{y}^{(j)} = 0$, pentru $i \neq j$.

Substituind $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x}$ rezultă $\mathbf{x}^{(i)T}\mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{x}^{(j)} = 0$, sau, ţinând cont de (3),

$$\mathbf{x}^{(i)T}\mathbf{M}\mathbf{x}^{(j)} = 0 . \tag{9}$$

2) **K**-ortogonalitate:

Vectorii **y** sunt ortogonali relativ la matricea **R**, adică

$\mathbf{y}^{(i)T}\mathbf{R}\mathbf{y}^{(j)} = 0$, pentru $i \neq j$.

Cum $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x}$, urmează că $\mathbf{x}^{(i)T}\mathbf{S}^T\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{x}^{(j)} = 0$. Din (6) avem $\mathbf{S}^T\mathbf{R}\mathbf{S} = \mathbf{K}$, şi astfel, obţinem

$$\mathbf{x}^{(i)T}\mathbf{K}\mathbf{x}^{(j)} = 0 , \tag{10}$$

care probează ortogonalitatea relativ la **K**. Concluzia (10) se poate obţine şi din (4), premultipicând cu $\mathbf{x}^{(i)T}$ şi utilizând (9).

În final, să introducem matricea vectorilor proprii

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}^{(1)} \mid \mathbf{x}^{(2)} \mid \dots \mid \mathbf{x}^{(n)}] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{array}\right],$$

şi să presupunem că **X** este normalizată, adică $\| \mathbf{x}^{(i)} \|_2 = 1$. Să notăm:

$$\mathbf{x}^{(i)T}\mathbf{M}\mathbf{x}^{(i)} = M_i , \tag{11}$$

$$\mathbf{x}^{(i)T}\mathbf{K}\mathbf{x}^{(i)} = K_i . \tag{12}$$

Se pot da formule explicite pentru M_i şi K_i. Observaţi că, în acord cu definirea pozitivă a lui **M** şi **K**, avem $M_i > 0$ şi $K_i > 0$. Mai mult, din (4) obţinem $K_i = \lambda M_i$.

Cu (11) şi (12), relaţiile de ortogonalitate (9) şi (10) pot fi scrise, respectiv, ca

$\mathbf{X}^T\mathbf{M}\mathbf{X} = diag(M_i)$,

şi

$\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X} = diag(K_i)$.

■

NOTE

1. Algoritm şi Rutine

Rutinele pentru calculul pulsaţiilor şi vectorilor proprii prin metoda de mai sus, se găsesc în folderele din `\ANA\EIGEN\` – Biblioteca ANA .

Calculul va parcurge următorii paşi:

1) Calculul matricii **R**: `\Eigen\General_R` (sau `General_R1`)
   V. mai jos Nota 5 – Scalarea matricii **R**.
2) Calculul valorilor şi vectorilor proprii ai matricii **R**:
   `\Eigen\QR; \Eigen\Jacobi_D; \Eigen\Sim_Iter_D;`
3) Regăsirea valorilor şi vectorilor proprii ai problemei generalizate: `\Eigen\Retrieve_Eigen_from_R`

Toate rutinele menţionate lucrează în dublă precizie.

2. Note pentru Analiza structurilor

- Matricea de rigiditate **K** va fi furnizată de programul de analiză statică – cu încărcările date de greutatea maselor.
- Matricea de masă **M** va fi:
  - Generată direct, pentru mase concentrate;
  - Furnizată de programul de analiză dinamică, pentru mase distribuite. (Acesta va fi rulat pe un interval mic, cu condiţii iniţiale nenule, şi încărcări nule.)

3. *Unităţi de măsură*

Pentru ca pulsaţiile să rezulte în s^{-1} trebuie ca elementele matricii **M** să fie în *kg*, iar cele ale matricii **K** în $\frac{N}{m}$.

Mai general, rigiditatea și masa să fie în unităţi compatibile, astfel ca ω^2 să rezulte în $1/s^2$, iar ω în $1/s$. Astfel:

Luând forţa (F), sau lungimea (L), în alte unităţi (decît unităţile SI), masa va fi mărime derivată, anume:

$$M = \frac{F}{L/t^2}.$$

<u>*Exemplu*</u>

Forța: *kN*; Lungimea: *m*.

Rigiditatea: $\frac{kN}{m}$;

Unitatea de masă: $\frac{kN}{m/s^2} = \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (= 10^3 kg)$

■

Programul `General_R` cere, la citirea din fişier a matricilor **M** şi **K**, introducerea unor factori care înmulţesc aceste matrici. Aceşti factori vor asigura transformarea unităţilor folosite la generarea matricilor, în unităţi SI (sau, în unităţi compatibile).

4. *Pulsaţii sau frecvenţe*

In particular, `General_R` permite opţiunea de a calcula pulsaţii sau frecvenţe. Frecvenţele sunt legate de pulsaţii prin

$$f_i = \omega_i/(2\pi) \quad [1/s]$$

Perioadele de vibraţie sunt:

$$T_i = \frac{1}{f_i} = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad [s]$$

5. Scalarea matricii **R**

Matricea **R** poate fi scalată, adică se pune $\mathbf{R} = \mathbf{R}' * \mathit{factor}$. (Aceasta s-ar face dacă **R** conține numere mari.)

Ecuaţia (7)

$$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

împărțită cu *factor*, devine

$$\left(\frac{\mathbf{R}}{factor} - \frac{\lambda}{factor}\mathbf{I}\right)\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Sau

$$(\mathbf{R}' - \lambda'\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

unde:

$$\mathbf{R}' = \frac{\mathbf{R}}{factor}; \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{factor}.$$

Astfel, după determinarea valorilor proprii λ' avem $\lambda = \lambda' * \mathit{factor}$, iar pulsaţiile proprii se găsesc din:

$$\omega = \sqrt{\lambda' * \mathit{factor}}.$$

- Programul `General_R` <u>scalează implicit</u> matricea **R**.
- Determinarea valorilor proprii (pasul 2) se poate face pentru **R**, sau pentru **R′**.
- Programul `Retrieve_Eigen_from_R` cere factorul de scalare (v. detalii în ANA).
  Dacă la pasul (2) se lucrează cu **R**, se va pune factorul de scalare egal cu 1.

■

Exemplu-II (Soluția numerică)

Considerăm Exemplul anterior si-l tratăm numeric cu pașii de mai sus:

1) **`General_R`**:

Produce: matricea **R** scalată (adică **R′**), și matricea $\mathbf{S}^{-1}$, sub forma (triunghiul superior):

```
Ex_Sc-Doct: Matricea R scalata

  0.5000000000000000     -0.3535533905932737       0.000000000000000
```

```
  0.7500000000000000     -0.4472135954999579

  1.200000000000000

 Factor de scalare (R =R'*factor):

   2.00000000000000


Matricea S^(-1):

   1.00000000000000       0.000000000000000E+000  0.000000000000000E+000

  0.707106781186547       0.000000000000000E+000

  0.632455532033676
```

2) QR

Aplicată lui **R**, produce valorile proprii λ și vectorii proprii **y** (ai lui **R)**:

```
EIGEN_VALUES
 1  1.528400185593684
 2  0.3459957985551170
 3  3.025604111218631

EIGEN_VECTORS
      1
 -0.6825565128083051
  0.5100544891407807
  0.5234128627864462

      2
  0.7040066030216917
  0.6511368416641705
  0.2835410311215418

      3
  0.1961920225820203
 -0.5620188889485355
  0.8035194202632752
```

3) Retrieve_Eigen_from_R

Produce pulsațiile proprii ω și vectorii proprii **x**.
Pulsațiile proprii sunt date de $\omega = \sqrt{\lambda}$. (Factorul de scalare este *factor* =1.)

```
PULSATII PROPRII (omega):

 1  0.5882140754479758
```

```
 2   1.236284831903103
 3   1.739426374187373


VECTORII PROPRII   (Norma-2)

       1
  0.8185165513760134
  0.5353132635520889
  0.2084954795402763

       2
 -0.8125986058194142
  0.4293772541281472
  0.3941049092027615

       3
  0.2909563189794804
 -0.5893623159098743
  0.7536554126596984
```

Comparați vectorul propriu nr. 3, cu cel din soluția analitică (Exemplu-I):

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.2909563 \\ -0.5893622 \\ 0.7536554 \end{bmatrix}$$

(Vectorul $\mathbf{x}^{(1)}$, și vectorul propriu nr. 3, corespund valorii proprii dominante a lui **R**, anume $\lambda_1 = 3.025604\ldots$)

■