

## CURS 5

## INTERPOLARE POLINOMIALĂ. DERIVARE NUMERICĂ.

**I. Interpolare polinomială****II. Derivare numerică.****I. INTERPOLARE POLINOMIALĂ****1 Introducere****1.1 Polinomul de interpolare**

Problema: fie o funcție  $f$ , cunoscută prin valorile ei pe  $(n + 1)$  puncte distincte  $x_i$ , ca în tabelul următor:

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$f(x)$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$\dots$	$f_n$

Punctele  $x_i$  se numesc *noduri* și s-a notat  $f_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$ .

Se cere să se găsească un polinom  $p_n$  de grad cel mult  $n$ , care să coincidă cu funcția  $f$  pe nodurile  $x_i$  (sau, al cărui grafic să treacă prin punctele  $(x_i, f_i)$ ), adică:

$$p_n(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0, n} \quad (0)$$

Se zice că  $p_n$  este *polinomul de interpolare* al funcției  $f$ , pe nodurile date. Un prim rezultat este dat de următoare propoziție:

**Propoziția 1**

Polinomul de interpolare (al funcției  $f$ , pe  $n + 1$  noduri) există și este unic ■

*Demonstrație:*

(1) *Existența*: Existența se poate proba construind efectiv polinomul (aceasta se va face în paragrafele următoare). Aici, procedăm prin inducție asupra lui  $n$ : pentru  $n = 0$ , luăm ca polinom  $p_0$  funcția constantă  $p_0(x) = f_0$ . Fie atunci  $p_{k-1}$  polinomul de interpolare pe nodurile  $x_0, \dots, x_{k-1}$ , adică  $p_{k-1}$  este de grad  $\leq k-1$ , și

$$p_{k-1}(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0, k-1}. \quad (*)$$

Definim:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Este evident că  $p_k$  satisface condițiile (\*), și atunci determinăm  $c_k$  astfel ca să avem și

$$p_k(x_k) = f_k$$

Se obține ecuația

$$f_k = p_k(x_k) + c_k(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1}) \quad (**)$$

în care, coeficientul lui  $c_k$  este diferit de zero, nodurile  $x_i$  fiind presupuse distincte.

Cu aceasta, existența lui  $p_n$  este demonstrată.

(2) *Unicitatea*: Fie  $p_n$  și  $q_n$  două polinoame de interpolare ale lui  $f$ , unde  $p_n \neq q_n$ .

Considerăm atunci polinomul  $r_n = p_n - q_n$ :  $r_n$  este de grad cel mult  $n$  și avem

$r_n(x_i) = 0, i = \overline{0, n}$ , adică  $r_n$  are  $(n+1)$  rădăcini. Contradicția demonstrează unicitatea lui  $p_n$  ■

### Observație

După demonstrația (1), rezultă că polinomul de interpolare are forma

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (1)$$

unde  $c_0 = f_0$  și  $c_k$  rezultă din (\*\*). Acesta este forma Newton a polinomului de interpolare. O expresie explicită a coeficienților  $c_k$  se va da în 3. Alte construcții ale polinomului de interpolare, duc la alte forme ale acestuia – v. 2. Propoziția 1 arată că

polinomul de interpolare este unic determinat, adică: indiferent de forma sub care este dat  $p_n$ , dacă acesta este dezvoltat în forma  $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , coeficienții  $a_k$  vor fi aceeași ■

Din punct de vedere practic, polinomul de interpolare servește la aproximarea valorii funcției  $f$ , pe un punct  $x$  care nu este nod. Problema interpolării polinomiale se poate pune, mai general, astfel: cunoscând valorile funcției  $f$  și derivatei  $f'$  (sau derivatelor până la ordinul  $k$ ) pe noduri, să se determine polinomul care coincide cu funcția și derivata (derivatele), pe nodurile date. Aceasta conduce la polinomul de interpolare al lui Hermite sau polinomul osculator.

Pe lângă problema aproximării funcțiilor, polinomul de interpolare intervine în multe alte probleme de analiză numerică: formule de cuadratură (calculul numeric al integralelor), derivare numerică, metode numerice pentru ecuații diferențiale, etc..

## 1.2 Formula de interpolare (cu rest)

Definim *formula de interpolare* prin

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \quad (2)$$

în care  $R_n(x)$  este restul formulei. Conform definiției lui  $p_n$ , avem:

$$R_n(x_i) = 0, \quad i = \overline{0, n} \quad (3)$$

În ceea ce urmează vom considera evaluarea restului pe un punct  $x$  care nu este nod. Introduce următorul polinom care va servi și în paragrafele următoare:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (4)$$

Cu acesta avem:

### **Propoziția 2**

Fie funcția  $f$  definită pe un interval  $[A, B]$  și având derivată de ordinul  $(n+1)$  în

$[A, B]$ , și  $p_n$  polinomul de interpolare pe nodurile distincte  $x_i \in [A, B]$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Fie

încă,  $x \in [A, B]$  și  $a = \min(x_0, \dots, x_n, x)$  și  $b = \max(x_0, \dots, x_n, x)$ . Atunci:

$\exists \xi \quad a < \xi < b$ , astfel că

$$R_n(x) = \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (5)$$

unde  $\omega_n(x)$  este definit de (4) ■

### Observație

Dacă  $f^{(n+1)}$  este mărginită în  $[A, B]$ , fie  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$ , rezultă marginea erorii reprezentării funcției prin polinomul de interpolare, sub forma:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} |\omega(x)|$$

În particular, dacă  $a$  și  $b$  au semnificația din enunț, eroarea se poate mărgini prin:

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} (b-a)^{n+1}$$

■

### 1.3 Polinomul de interpolare Lagrange

Căutăm polinomul de interpolare sub forma

$$p_n(x) = f_0 l_0(x) + f_1 l_1(x) + \dots + f_n l_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j l_j(x) \quad (6)$$

în care  $l_j$  sunt polinoame de grad  $\leq n$ , care depind de nodurile  $x_i$  dar nu depind de  $f_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Întrucât se cere ca  $p_n(x_i) = f_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , rezultă că trebuie să avem

$$l_j(x_i) = \delta_{ji}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (7)$$

unde  $\delta_{ji}$  este simbolul Kronecker. Pentru  $i \neq j$  rezultă că  $l_j$  are ca rădăcină pe  $x_i$ , și atunci, forma polinomului  $l_j$  va fi

$$l_j(x) = c(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n) = c \frac{\omega_n(x)}{x-x_j}, \quad (8)$$

unde  $\omega_n(x)$  este definit de (4).

Punând condiția (7) pentru  $j = i$ , rezultă  $1 = c \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)$ , sau

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \quad (9)$$

Scriind  $\omega_n(x) = (x - x_j) \prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i)$ , derivând în raport cu  $x$  și punând  $x = x_j$ ,

rezultă

$$\omega_n'(x_j) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i). \quad (10)$$

Cu aceasta, forma (8) a polinomului  $l_j$  se mai scrie:

$$l_j(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)\omega_n'(x_j)} \quad (11)$$

iar polinomul Lagrange ia forma explicită

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f_j}{\omega_n'(x_j)} \frac{\omega_n(x)}{(x - x_j)} \quad (12)$$

### Observații

1) Polinoamele  $l_j$  se numesc *polinoamele fundamentale de interpolare*. Polinoamele fundamentale satisfac identitățile:

$$\sum_{j=0}^n (x_j)^k l_j(x) = x^k, \quad k = \overline{0, n} \quad (13a)$$

$$\sum_{j=0}^n l_j(x) = 1 \quad (13b)$$

Relația (13a) rezultă astfel: considerăm funcția  $f(x) = x^k$ ,  $0 \leq k \leq n$ ; polinomul  $p_k(x) = x^k$  este de grad  $\leq n$  și coincide cu funcția pe noduri; conform unicității, urmează că  $p_k$  este polinomul de interpolare; atunci, (13a) rezultă din (6). Relația (13b), este (13a) cu  $k = 0$ .

2) Fie  $\mathbf{F}$  mulțimea funcțiilor definite pe un interval care conține nodurile  $x_i, i = \overline{0, n}$ .

Polinomul de interpolare sub forma lui Lagrange este dat de

$$p_n(x) = (L_n f)(x) \quad (14)$$

unde  $L_n$  este operatorul definit (pe mulțimea  $\mathbf{F}$ ) de

$$L_n f = \sum_{j=0}^n f_j l_j \quad (15)$$

Se verifică imediat, că operatorul  $L_n$  este liniar, adică, pentru  $f, g \in \mathbf{F}$  și  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , avem:

$$L_n(\alpha f + \beta g) = \alpha(L_n f) + \beta(L_n g) \quad (16)$$

În particular, dacă  $f$  este un polinom  $p_k$  de grad  $k \leq n$ , avem:

$$L_n p_k = p_k \quad (17)$$

Relația (17) rezultă din unicitatea polinomului de interpolare.

Exercițiu: probați (17) ținând cont de (13a) și (16).

■

## 2 Diferențe divizate și polinomul de interpolare Newton

### 2.1 Diferențe divizate și polinomul Newton cu diferențe divizate

Considerăm expresia (1) a polinomului de interpolare, și definim polinoamele

$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = x - x_0, \quad q_2(x) = (x - x_0)(x - x_1), \dots,$$

sau, în general,

$$q_0(x) = 1; \quad q_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i), \quad k = \overline{1, n} \quad (18)$$

Observație: pentru  $k \geq 1$ , avem  $q_k = \omega_{k-1}$ , unde  $\omega_n$  este definit de (4).

Polinomul de interpolare sub forma Newton se scrie atunci:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k q_k(x) \quad (18')$$

Coeficientul  $c_k$  se numește *diferența divizată de ordinul  $k$*  (a funcției  $f$ , pe nodul  $x_k$ ) și se notează cu

$$c_0 = f[x_0]; \quad c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad k \geq 1.$$

Cu aceasta, expresia (18) a polinomului de interpolare se scrie

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] q_k(x) \quad (19)$$

sau explicit:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, \dots, x_n] \quad (19')$$

Pentru a găsi expresia explicită a diferențelor divizate, procedăm cum urmează: polinomul de interpolare fiind unic, egalăm coeficientul lui  $x^n$  din formele (19) și (12). Rezultă:

$$c_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f_j}{\omega'_n(x_j)} \quad (n \geq 1) \quad (20)$$

Reamintim că  $\omega'_n(x_j)$  este dat de (10), fiind produsul factorilor  $(x_j - x_i)$ , pentru  $i \neq j, i = \overline{0, n}$ .

*O formulă a restului:*

Să considerăm  $(k+2)$  noduri  $x_0, \dots, x_n, x_{n+1}$ . Formula (18) devine:

$$p_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k q_k(x) = p_n(x) + c_{n+1} q_{n+1}(x)$$

Pentru  $x = x_{n+1}$  avem  $p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$  și, utilizând și  $q_{n+1} = \omega_n$ , rezultă:

$$f(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + c_{n+1} \omega_n(x_{n+1}),$$

în care  $c_{n+1} = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ . Notăm acum  $x$  în loc de  $x_{n+1}$ , și obținem:

$$f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \omega_n(x) \quad (21)$$

care dă o altă formă a restului în formula de interpolare.

## 2.2 Proprietăți ale diferențelor divizate

O serie de proprietăți ale diferențelor divizate se dau în propozițiile care urmează.

### P1 – Simetrie

Diferența divizată este o funcție simetrică de argumentele sale ■

Adică, considerând o permutare  $(i_0, \dots, i_n)$  a numerelor  $(1, \dots, n)$ , avem:

$$f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}] = f[x_0, \dots, x_n]$$

Acesta rezultă imediat din (20), ținând cont că  $\omega'(x_j)$  este invariant la o permutare a lui  $(1, \dots, n)$ .

### P2 – Formulă de recurență

Avem formula

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \quad (22) \blacksquare$$

### Consecința 2.1 - Calculul practic al diferențelor divizate:

Notând nodurile cu  $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n}$ , (22) devine:

$$f[x_j, \dots, x_{j+n}] = \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+n}] - f[x_j, \dots, x_{j+n-1}]}{x_{j+n} - x_j} \quad (22')$$

și  $f[x_j] = f_j$ . Utilizând notația simplificată  $f_{j \ j+1 \dots \ j+n} = f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n}]$ , (21') se scrie:

$$f_{j \ j+1 \dots \ j+n} = \frac{f_{j+1 \dots \ j+n} - f_{j \dots \ j+n-1}}{x_{j+n} - x_j} \quad (22'')$$

Astfel, obținem diferențele de ordinul 1, 2, 3, etc.:

$$1: \quad f_{01} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}; \quad f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}; \quad f_{23} = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2};$$



$$2: f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{x_2 - x_0}; \quad f_{123} = \frac{f_{23} - f_{12}}{x_3 - x_1};$$

$$3: f_{0123} = \frac{f_{123} - f_{012}}{x_3 - x_0};$$

Etc.

Diferențele divizate se pot așeza în următorul tabel – exemplu pentru 4 noduri:

$$\begin{array}{cc|ccc} x_0 & f_0 & f_{01} & f_{012} & f_{0123} \\ x_1 & f_1 & f_{12} & f_{123} & \\ x_2 & f_2 & f_{23} & & \\ x_3 & f_3 & & & \end{array}$$

Primele două coloane sunt datele problemei. Coloana a doua reprezintă și diferențele de ordinul 0; diferențele de ordinul 1, 2, 3 sunt în coloanele 3, 4, 5. Tabloul are structura triunghiulară: datele nu permit calculul diferențelor  $f_{j\dots j+n}$  cu  $j+n = 4$  (care implică nodul  $x_4$ ). Polinomul de interpolare Newton, pentru exemplul din tabel, este:

$$p_4(x) = f_0 + f_{01}(x - x_0) + f_{012}(x - x_0)(x - x_1) + f_{0123}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad (23)$$

astfel că coeficienții lui se găsesc în prima linie din tabel (începând cu coloana 2).

Pentru calculul practic al coeficienților polinomului Newton, notăm coeficienții ca în tabloul de mai jos, unde indicele  $j$  corespunde nodului, iar indicele  $k$  ordinului diferenței:

$$\begin{array}{cc|ccc} x_0 & c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ x_1 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & \\ x_2 & c_{20} & c_{21} & & \\ x_3 & c_{30} & & & \end{array} \quad (24)$$

Correspondența este:

$$c_{jk} = f_{j j+1 \dots j+k} \quad (24')$$

Cu aceasta, (23) se scrie:

$$p_4(x) = c_{00} + c_{01}(x - x_0) + c_{02}(x - x_0)(x - x_1) + c_{03}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad (23')$$

Coeficienții  $c_{jk}$  se calculează prin recurență, cu formula care derivă din (21") și (24'):

$$c_{jk} = \frac{c_{j+1,k-1} - c_{j,k-1}}{x_{j+k} - x_j}.$$

Un program Fortran care implementează calculul coeficienților și a valorii polinomului pe punctul  $z$ , este dat în ANA/Interpolare/Newton.

■

### Exemplu

Considerăm tabelul (23) pentru diferențele funcției  $f(x) = (x - 1)^3$  pe nodurile

$\{-1, 0, 1, 2\}$ :

$$\begin{array}{cc|ccc} -1 & -8 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & . \\ 1 & 0 & 1 & . & . \\ 2 & 1 & . & . & . \end{array}$$

Polinomul de interpolare (22') este

$$p_4(x) = -8 + 7(x + 1) - 3(x + 1)x + (x + 1)x(x - 1).$$

Se verifică imediat că,  $p_4(x) = (x - 1)^3$  ■

### Propoziția 3 – Proprietatea de medie

Fie  $x_0, \dots, x_k$ ,  $(k+1)$  puncte *distincte*,  $[a, b]$  intervalul *minim* care conține aceste puncte, și funcția  $f$  definită pe  $[a, b]$  și având derivată de ordinul  $k$ , continuă în  $(a, b)$ .

Atunci, există un punct  $\xi = \xi(x_0, \dots, x_k)$ ,  $\xi \in (a, b)$ , astfel că

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \quad (25)$$

■

*Demonstrație:*

Egalând resturile din (21) și din (5) – Propoziția 2, obținem:

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

în care  $\xi \in (a, b)$  și depinde de  $x$  și de  $x_0, \dots, x_n$ . P3 rezultă punând  $n = k-1$  și  $x = x_k$

■

**Consecința 3.1** – *Diferența divizată pe puncte confundate*

Dacă  $f$  este definită pe  $[a, b]$  și are derivată de ordinul  $k$  continuă în  $(a, b)$ , atunci

$$\forall x, x_0, \dots, x_k \in (a, b)$$

$$\lim_{x_0, \dots, x_k \rightarrow x} f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \quad (25')$$

■

Cu  $x_0, \dots, x_k \rightarrow x$ , rezultă că avem și  $\xi \rightarrow x$ , unde  $\xi$  este definit în P3 ■

Din (25') rezultă că, în ipotezele din Consecință, putem scrie:

$$f[\underbrace{x, x, \dots, x}_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \quad (26)$$

Această formulă constituie *definiția* diferenței divizate pentru cazul în care punctele toate punctele  $x_i$  sunt confundate – v. 3.3.

**Propoziția 4** – *Formula Hermite – Genocchi*

Dacă  $f$  are derivate continue până la ordinul  $n$  inclusiv, pe intervalul  $(a, b)$  care conține nodurile distincte  $x_0, \dots, x_n$ , atunci

$$f[x_0, \dots, x_n] = \int \cdots \int_{S_n} f^{(n)}(t_0 x_0 + \dots + t_n x_n) dt_1 \dots dt_n \quad (27)$$

în care  $S_n$  este *simplex*-ul:

$$S_n = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \quad (27')$$

■

Demonstrația se face prin inducție asupra lui  $n - v$ . Atkinson (1978), Kincaid & Cheney (1996).

### 2.3 Extinderea diferențelor divizate la puncte non-distincte

Relația (27) constituie o altă reprezentare a diferențelor divizate, care poate fi luată ca *definiție* a acestora. Aceasta coincide cu definițiile date anterior, în cazul când punctele  $x_0, \dots, x_n$  sunt distincte. Extinderea constă în faptul că, odată cu definiția (27), argumentele pot să nu mai fie considerate distincte. Întrucât integrandul în (27) este o funcție continuă de argumentele  $x_0, \dots, x_n$ , rezultă că și diferența divizată din membrul I va fi o funcție continuă de aceste argumente. Astfel, avem:

#### **Consecința 4.1**

Fie  $f$  continuă și având derivată  $f^{(n)}$  continuă pe  $[a, b]$ . Fie  $x_0, \dots, x_k$ ,  $k \leq n$ , conținute în  $[a, b]$  și considerăm diferența divizată  $f[x_0, \dots, x_k]$  definită de (27) pentru  $n = k$ . Atunci:

Diferența divizată  $f[x_0, \dots, x_k]$  este o funcție continuă de argumentele  $x_0, \dots, x_k$  (dintre care unele pot coincide), și care se reduce la definițiile anterioare în cazul argumentelor distincte ■

Propoziția 3 de mai sus, poate fi generalizată la cazul argumentelor non-distincte:

#### **Consecința 4.2**

Dacă  $f$  are derivată  $f^{(n)}$  continuă pe  $[a, b]$  și  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ , nefiind în mod necesar distincte, atunci

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

unde  $\min(x_0, \dots, x_n) \leq \xi \leq \max(x_0, \dots, x_n)$  ■

Demonstrația se face pe baza teoremei de medie a integralei definite și relației (25) – v. Isaacson & Keller (1965). În particular, se regăsește (26) ■

Reprezentarea (22) – Propoziția 2, a diferențelor divizate, se extinde la cazul punctelor non-distincte, prin:

### **Consecința 4.3**

Dacă  $f$  are derivată  $f^{(n)}$  continuă pe  $[a, b]$  și  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  (nefiind în mod necesar distincte) și  $x \in [a, b]$ ,  $x$  fiind distinct de oricare  $x_i$ , atunci:

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_1, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_n]}{x - x_0}$$

■

Vezi alte proprietăți în Isaacson & Keller (1965).

## **3 Interpolare pe noduri echidistante. Formule cu diferențe finite.**

### **3.1 Diferențe înainte și polinomul Gregory-Newton**

Considerăm șirul de noduri echidistante cu pasul  $h > 0$ :

$$x_j = x_0 + jh, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (28)$$

unde  $x_0$  este un nod fixat arbitrar.

Definim *diferența înainte* (progresivă), a funcției  $f$  pe punctul  $x$  cu pasul  $h$ , prin:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (29a)$$

Operatorul  $\Delta$  definit de (29a) se zice operatorul diferență înainte (mai general, dacă se face referire explicită la pasul  $h$ , operatorul se notează  $\Delta_h$ ). Pentru  $r$  întreg,  $r \geq 0$ , definim diferențele de ordin superior prin formula de recurență:

$$\Delta^{r+1} f(x) = \Delta^r (\Delta f(x)) = \Delta^r f(x+h) - \Delta^r f(x), \quad (29b)$$

unde  $\Delta^0 f = f$  și  $\Delta^1 = \Delta$ .

**Exemplu:**

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \blacksquare$$

Pentru nodurile echidistante (28), notăm

$$f_j = f(x_j) = f(x_0 + jh) \quad (30)$$

și avem:

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j, \quad \Delta^{r+1} f_j = \Delta^r (\Delta f_j). \quad (30')$$

În particular, exemplul de mai sus devine:  $\Delta^2 f_j = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$ . Observăm că diferența  $\Delta^r f_j$  implică nodurile  $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+r}$ . Se verifică imediat că  $\Delta^r$  este un operator liniar, adică

$$\Delta^r (\alpha f_j + \beta g_j) = \alpha \Delta^r f_j + \beta \Delta^r g_j,$$

pentru oricare două funcții  $f, g$  și orice scalari  $\alpha, \beta$ . Se verifică de asemenea că avem:

$$\Delta^r (\Delta^s f_j) = \Delta^s (\Delta^r f_j) = \Delta^{r+s} f_j.$$

**Proprietăți ale diferențelor**

*PI – Expresia diferenței de ordinul  $r$*

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f[x + (r-k)h] \quad (31)$$

unde  $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$  este coeficientul binomial  $\blacksquare$

Demonstrația se face prin inducție asupra lui  $r$ . Sau, prin observația că diferența este o combinație liniară de valorile funcției  $f$  pe nodurile  $x + ih$ ,  $i = \overline{0, r}$ , cu coeficienți care nu depind de  $f$ : se particularizează atunci  $f$ , luând  $f(x) = e^x$ . Exercițiu!

*Observație*

În formula (31), suma este ordonată descrescător în raport cu indicele  $(r-k)$ . Punând  $i = r-k$ , (31) se mai scrie:

$$\Delta^r f(x) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x+ih) \quad (31')$$

în care suma este ordonată crescător în raport indicele  $i$  al nodului.

Luând  $x = x_j$ , cu notația (30), formulele (31) și (31') devin:

$$\Delta^r f_j = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f_{j+r-k} \quad (32)$$

$$\Delta^r f_j = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{j+i} \quad (32')$$

## P2 – Diferențele unui polinom

a) Dacă  $p_m$  este un polinom de grad  $m$ , diferența  $\Delta^r p_m$  este un polinom de grad  $m-r$ .

b) Avem:  $\Delta^r x^r = r!h^r$  (33)

■

*Demonstrație:*

a) Fie  $p_m = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ , conform liniarității operatorului diferență, rezultă

$$\Delta^r p_m = \sum_{k=0}^m a_k \Delta^r x^k. \text{ Avem, } \Delta x^k = (x+h)^k - x^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} h^{k-j} x^j, \text{ rezultă că } \Delta x^k \text{ este}$$

un polinom de grad  $k-1$ . Continuând, rezultă că:

$$\Delta^r x^k = \text{polinom de gradul } r-k, \text{ pentru } r \geq k, \quad (*)$$

$$\Delta^r x^k = 0 - \text{pentru } r > k. \quad (**)$$

În particular,  $\Delta^k x^k = \text{constant}$  (polinom de grad 0). Astfel rezultă:

$$\Delta^r p_m = \sum_{k=r}^m a_k \Delta^r x^k,$$

care este un polinom de grad  $m-r$ .

b) Avem  $\Delta x^r = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} h^{k-j} x^j + rhx^{r-1}$ , în care primul termen este un polinom de grad

$(k-2)$ . Aplicând operatorul  $\Delta^{r-1}$  și ținând cont de (\*\*), rezultă

$$\Delta^r x^r = \Delta^{r-1}(\Delta x^r) = rh\Delta^{r-1}(x^{r-1})$$

care, aplicată succesiv, conduce la concluzia ‘b’

■

#### **P4** – Relația între diferențele divizate și diferențele înainte, pe noduri echidistante

Pentru nodurile echidistante  $x_j = x_0 + jh$ ,  $j = \overline{0, k}$  și  $k \geq 0$ , avem:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{1}{k!h^k} \Delta^k f_0 \quad (34)$$

■

(Demonstrația se face prin inducție.)

#### **Polinomul Gregory-Newton**

Cu expresia (34) a diferențelor divizate, polinomul de interpolare sub forma Newton (19), ia forma:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!h^k} q_k(x) \Delta^k f_0 \quad (35)$$

unde polinoamele  $q_k$  sunt definite de (18) prin:

$$q_0(x) = 1; \quad q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \quad k = \overline{1, n}.$$



Definim variabila *reală*  $s$  prin:

$$x = x_0 + sh, \quad s = (x - x_0) / h \quad (36)$$

Ținând cont de  $x_j = x_0 + jh$ , avem:  $x - x_j = (s - j)h$  și polinomul  $q_k(x)$  se scrie:

$$q_k(x) = q_k(x_0 + sh) = h^k \prod_{j=0}^{k-1} (s - j) = h^k s(s-1)\dots(s-k+1), \quad k \geq 1$$

Cu aceasta, polinomul (35) ia forma

$$p_n(x) = \bar{p}_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!} \Delta^k f_0$$

Notăm coeficientul diferenței, prin:

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}, \quad k \geq 1; \quad \binom{s}{0} = 1 \quad (37)$$

Coeficientul  $\binom{s}{k}$  generalizează expresia coeficientului binomial, la care se reduce

pentru  $s = \hat{\text{întreg}} \text{ pozitiv}$ . Cu aceasta, polinomul de interpolare ia forma:

$$\bar{p}_n(s) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \quad (38)$$

în care,

$$s = (x - x_0) / h. \quad (38')$$

Polinomul (38) se numește polinomul de interpolare Gregory-Newton. Explicit, avem:

$$\bar{p}_n(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_0 + \binom{s}{3} \Delta^3 f_0 + \dots + \binom{s}{n} \Delta^n f_0 \quad (38'')$$

### Exemplu

Reluăm exemplul din 3, în care valorile sunt date pentru funcția  $f(x) = (x-1)^3$ , pe nodurile: -1, 0, 1, 2. Avem  $x_0 = -1$ ,  $h = 1$ ,  $n = 3$ , și calculăm diferențele înainte

$\Delta f_i, \Delta^2 f_i, \Delta^3 f_0$ , în tabelul următor:

$f$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
$f_0 = -8$			
	$\Delta f_0 = 7$		
$f_1 = -1$		$\Delta^2 f_0 = -6$	
	$\Delta f_1 = 1$		$\Delta^3 f_0 = 6$
$f_2 = 0$		$\Delta^2 f_1 = 0$	
	$\Delta f_2 = 1$		
$f_3 = 1$			

(39)

Coefficienții polinomului Newton (38) (cu nodul de plecare  $x_0$ ) sunt situați pe *diagonala descendentă* care pleacă din  $f_0$ . Rezultă:

$$\bar{p}_3(s) = -8 + s7 + \frac{1}{2}s(s-1)(-6) + \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)6 = (s-2)^3$$

Cu  $x_0 = -1$ ,  $s = x + 1$ , se verifică:  $\bar{p}_3(s) = (x-1)^3$  ■

### 3.2 Diferențe înapoi și polinomul de interpolare Newton cu diferențe înapoi

Definim *diferența înapoi* (regresivă), a funcției  $f$  pe punctul  $x$  cu pasul  $h$ , prin:

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \quad (40)$$

și diferențele de ordin superior, prin:

$$\nabla^{r+1} f(x) = \nabla^r (\Delta f(x)) = \nabla^r f(x+h) - \nabla^r f(x) \quad (41)$$

Între diferențele înainte și înapoi există relația:

$$\nabla f(x) = \Delta f(x-h)$$

și prin recurență se arată că

$$\nabla^r f(x) = \Delta^r f(x - rh) \quad (42)$$

sau, cu notația (29):

$$\nabla^r f_j = \Delta^r f_{j-r}. \quad (42')$$

Procedăm analog cu 4.1, utilizând nodurile  $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-n}$ , unde  $x_{-j} = x_0 - jh$ ,

$j = \overline{0, n}$ . Punând  $x = x_0 + sh$ , avem  $x - x_{-j} = (s + j)h$ . Avem:

$$q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_{-j}) = \prod_{j=0}^{k-1} (s + j)h$$

$$q_k(x_0 + sh) = h^k (s)(s+1)\dots(s+k-1) = h^k (-1)^k (-s)(-s-1)\dots(-s-k+1)$$

polinomul de interpolare ia forma:

$$p_n(x) = \bar{p}_n(s) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_0 \quad (43)$$

în care,

$$s = (x - x_0) / h. \quad (43')$$

Polinomul (43) este forma polinomului Newton, cu diferențe înapoi. Explicit:

$$\bar{p}_n(s) = f_0 + s\nabla f_0 + \binom{-s}{2} \nabla^2 f_0 - \binom{-s}{3} \nabla^3 f_0 + \dots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f_0 \quad (43'')$$

### Exemplu

Reluăm exemplul anterior, din 4.2. Nodurile sunt 2, 1, 0, -1, și valorile  $f$  sunt: 1, 0, -1, -8. Avem (diferențele se pot calcula într-un tabel analog cu (39)):

$$\nabla f_0 = 1; \quad \nabla f_1 = 1, \quad \nabla f_2 = 7$$

$$\nabla^2 f_0 = 0; \quad \nabla^2 f_1 = -6$$

$$\nabla^3 f_0 = 6$$

Cu acestea, polinomul (43) devine:

$$\bar{p}_3(s) = 1 + s1 + \frac{1}{2}(-s)(-s-1)0 - \frac{1}{6}(-s)(-s-1)(-s-2)6 = (1+s)^3$$

Cu  $x_0 = 2$ ,  $s = x - 2$ , se verifică:  $\bar{p}_3(s) = (x - 1)^3$  ■

### Observație

Se observă că diferențele înapoi pe punctul  $x = 2$ , se găsesc în tabelul (39), pe *diagonala ascendentă* care pleacă din  $f_3$ . Aceasta are loc pentru următoarele: considerând nodurile în secvența crescătoare  $x_j = x_0 + jh$ ,  $j = \overline{0, n}$ , nodul de referință pentru diferențele înapoi este  $x_n$ , și polinomul (42") se scrie:

$$\bar{p}_n(s) = f_n + s\nabla f_n + \binom{-s}{2}\nabla^2 f_n - \binom{-s}{3}\nabla^3 f_n + \dots; \quad s = (x - x_0)/h.$$

Conform (42') avem  $\nabla^k f_n = \Delta^k f_{n-k}$ . În cazul exemplului, avem  $n = 3$  și rezultă:

$$\nabla f_3 = \Delta f_2, \quad \nabla^2 f_3 = \Delta^2 f_1, \quad \nabla^3 f_3 = \Delta^3 f_0 \quad \blacksquare$$

### 3.3 Operatori diferență și calcul simbolic

Pentru noduri echidistante cu pasul  $h$ , se introduc următorii operatori (pentru funcția  $f$ , pe punctul  $x$ ):

- 1) Identitate:  $If(x) = f(x)$
- 2) Deplasare:  $Ef(x) = f(x + h)$
- 3) Diferență înainte:  $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$
- 4) Diferență înapoi:  $\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$
- 5) Diferență centrală:  $\delta f(x) = f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})$

Se verifică imediat că operatorii 1 – 5 sunt liniari, adică, notând unul din operatori cu  $A$ , avem (pentru scalari arbitrari  $\alpha, \beta$ , și funcții arbitrare  $f, g$ ):

$$A(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha Af(x) + \beta Ag(x)$$

Suma a doi operatori, și produsul a doi operatori, se definesc respectiv prin:

$$(A + B)f(x) = Af(x) + Bf(x); \quad (AB)f(x) = A(Bf(x))$$

În conformitate cu definiția produsului, puterile întregi  $k$ , ale unui operator  $A$ , se definesc recurent prin:

$$A^0 = I; \quad A^k = AA^{k-1}, k \geq 1.$$

Mai definim, pentru  $s = \text{real}$ :

$$E^s f(x) = f(x + sh)$$

și avem (pentru  $s, t = \text{reali}$ ):  $E^s E^t f(x) = E^t E^s f(x)$ .

### Relații între operatori

Din definiții rezultă următoarele relații între operatori:

$$\Delta = E - I \tag{44}$$

$$\nabla = I - E^{-1} \tag{45}$$

$$\nabla = \Delta E^{-1} \tag{46}$$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} \tag{47a}$$

$$\delta = \Delta E^{1/2} \tag{47b}$$

Cu acestea, se pot deduce mai multe formule (unele demonstrate direct în paragrafele anterioare). Astfel, din (44) pentru  $r = \text{întreg}$ , avem:

$$\Delta^r = (E - I)^r = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} E^{r-k} I^k$$

Cu aceasta, ținând cont de  $I^k f(x) = f(x)$  și  $E^{r-k} f(x) = f[x + (r-k)h]$ , rezultă:

$$\Delta^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f[x + (r-k)h] \tag{48}$$

care reproduce formula (31). Analog, din (45) avem:

$$\nabla^r = (I - E^{-1})^r = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} I^{r-k} E^k$$

cu care, rezultă:

$$\nabla^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f(x - kh) \tag{49}$$

Din (46) avem:

$$\nabla^r = \Delta^r E^{-r}$$

care conduce la:

$$\nabla^r f(x) = \Delta^r f(x - rh),$$

care reproduce (42).

*Formule care implică diferențele centrale:*

Din (47a) avem

$$\delta^r = (E^{1/2} - E^{-1/2})^r = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} E^{m/2-k}$$

care, aplicată la  $f(x)$  dă:

$$\delta^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} f\left[x + \left(\frac{m}{2} - k\right)h\right]$$

Dacă luăm  $r = \text{par}$ ,  $r = 2p$ , rezultă

$$\delta^{2p} f(x) = \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k \binom{2p}{k} f[x - ph + (2p - k)h],$$

Utilizând (48) pentru  $r = 2p$  și  $x \mapsto x - ph$ , rezultă că avem relația:

$$\delta^{2p} f(x) = \Delta^{2p} f(x - ph)$$

astfel că diferențele centrale *de ordin par* se pot exprima prin diferențe înainte.

### 3.4 Alte polinoame de interpolare

Vom da alte forme ale polinomului de interpolare – pentru unele detalii v. Stancu (1977).

#### Polinoamele de interpolare Gauss

Presupunem că vrem să aproximăm valoarea funcției într-un punct apropiat de  $x_0$ . Se consideră atunci, un număr *par* de noduri (echidistante cu  $h$ ), fie acesta  $(2n+2)$ ,  $n$

situate la stânga și  $n+1$  la dreapta nodului  $x_0 : x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}; x_0; x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ .

Nodurile se iau în secvența următoare:

$$x_0; x_1, x_{-1}; \dots, x_n, x_{-n}; x_{n+1} \quad (*)$$

și utilizăm polinomul Newton dat de (19'). Acesta se scrie:

$$p_{2n+1}(x) = f_0 + (x - x_0)f_{0,1} + (x - x_0)(x - x_1)f_{0,1,-1} + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})f_{0,1,-1,2} \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)(x - x_{-n})f_{0,1,-1,\dots,n,-n,n+1}$$

Punem ca înainte  $x = x_0 + sh$  și avem  $x - x_i = (s - i)h$ . Ținem cont de de

proprietatea de simetrie a diferențelor divizate și de expresia acestora pe noduri echidistante (34). Astfel, rezultă:

$$x - x_0 = sh, \dots,$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_{-n+1})(x - x_n) = (s + n - 1) \dots (s - n)h^{2n},$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1}) \dots (x - x_n)(x - x_{-n}) = (s + n) \dots s \dots (s - n)h^{2n+1}.$$

$$f_{0,1} = \frac{1}{h} \Delta f_0, \quad f_{0,1,-1} = f_{-1,0,1} = \frac{1}{2!h^2} \Delta^2 f_{-1}, \dots,$$

$$f_{0,1,-1,\dots,n,-n} = f_{-n,\dots,0,\dots,n} = \frac{1}{(2n)!h^{2n}} \Delta^{2n} f_{-n},$$

$$f_{0,1,-1,\dots,n,-n,n+1} = f_{-n,\dots,0,\dots,n,n+1} = \frac{1}{(2n+1)!h^{2n+1}} \Delta^{2n+1} f_{-n}.$$

Înlocuind expresiile de mai sus în  $p_{2n+1}(x)$ , se obține:

$$p_{2n+1}(x) = G_{2n+2}^F(s) = \\ f_0 + s\Delta f_0 + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{s+k-1}{2k} \Delta^{2k} f_{-k} + \binom{s+k}{2k+1} \Delta^{2k+1} f_{-k} \right] \quad (50a)$$

unde indicele polinomului  $G$  este numărul de noduri (indicele polinomului  $p$  este gradul acestuia).

Dacă luăm un număr *impar* de noduri, eliminând în (\*) nodul  $x_{n+1}$ , se obține

$$p_{2n}(x) = G_{2n+1}^F(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \binom{s+k-1}{2k} \Delta^{2k} f_{-k} + \binom{s+k}{2k+1} \Delta^{2k+1} f_{-k} \right] + \binom{s+n-1}{2n} \Delta^{2n} f_{-n} \quad (50b)$$

Polinoamele (50a, b) sunt polinoamele de interpolare Gauss – înainte, cu număr impar, respectiv par, de noduri. Ele se scriu explicit:

$$G_m^F = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_0 + \binom{s}{2} \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \Delta^3 f_{-1} + \binom{s+1}{4} \Delta^4 f_{-2} + \dots$$

unde ultimul termen depinde de cazul  $m = 2n+2$  sau  $m = 2n+1$ .

Dacă luăm nodurile  $(x_{-n-1}, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}; x_0; x_1, \dots, x_n)$  în secvența:

$$x_0; x_{-1}, x_1; \dots, x_{-n}, x_n; (x_{-n-1}) \quad (**)$$

se obțin polinoamele de interpolare Gauss – înapoi, cu număr de noduri impar, respectiv par (inclusiv  $x_{-n-1}$ ):

$$G_{2n+1}^B(s) = f_0 + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{s+k-1}{2k-1} \Delta^{2k-1} f_{-k} + \binom{s+k}{2k} \Delta^{2k} f_{-k} \right] \quad (51a)$$

$$G_{2n+2}^B(s) = G_{2n+1}^B(s) + \binom{s+n}{2n+1} \Delta^{2n+1} f_{-n-1} \quad (51b)$$

De exemplu, explicit, avem:

$$G_{2n+1}^B(s) = f_0 + \binom{s}{1} \Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2} \Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3} \Delta^3 f_{-2} + \binom{s+2}{4} \Delta^4 f_{-2} + \dots$$

### Polinoamele Stirling

Se definesc prin media aritmetică a polinoamelor Gauss – înainte, respectiv – înapoi:

$$S_{2n+1}(s) = \frac{1}{2} [G_{2n+1}^F(s) + G_{2n+1}^B(s)] \quad (52a)$$

$$S_{2n+2}(s) = \frac{1}{2} [G_{2n+2}^F(s) + G_{2n+2}^B(s)] \quad (52b)$$

### Polinoamele Bessel

Se definesc prin:



Media aritmetică a polinomului Gauss – înainte cu punct de plecare  $x_0$ , și polinomului Gauss – înapoi cu punct de plecare  $x_1$ . Pentru acesta din urmă, secvența nodurilor se obține adăugând o unitate indicilor din (\*\*):

$x_1; x_0, x_2; x_{-1}, x_3; \dots; x_{-n+1}, x_{n+1}; (x_{-n})$ . Astfel, avem:

a) Polinomul Bessel – număr *par* de noduri:

$$B_{2n+2}(s) = \frac{1}{2}(f_0 + f_1) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{s - \frac{1}{2}}{2k-1} \binom{s+k-2}{2k-2} \Delta^{2k-1} f_{1-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \binom{s+k-1}{2k} (\Delta^{2k} f_{-k} + \Delta^{2k} f_{1-k}) \quad (53a)$$

Acesta coincide cu funcția pe nodurile:  $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}; x_0; x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ .

b) Polinomul Bessel – număr *impar* de noduri:

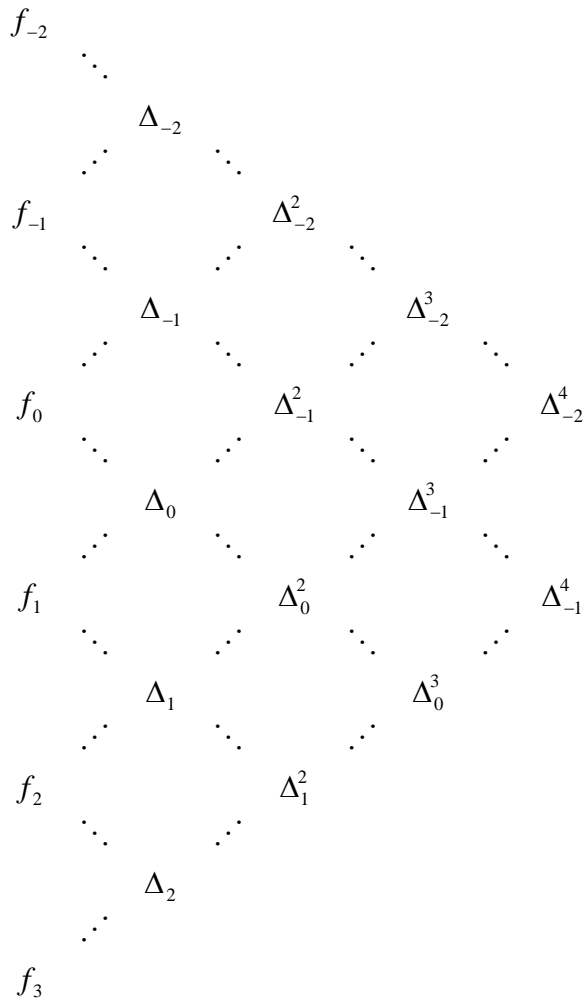
Formula de mai sus, în care prima sumă se face de la  $k=1$  la  $k=n$ . Avem:

$$B_{2n+2}(s) = B_{2n+1}(s) + \frac{s - \frac{1}{2}}{2n+1} \binom{s+n-1}{2n} \Delta^{2n+1} f_{-n} \quad (53b)$$





Pentru alte dezvoltări – v. Stancu (1977).

### 3.5 Diagrama romburilor pentru interpolare

Considerăm tabloul diferențelor înainte ale funcției  $f$ , pe noduri echidistante. În exemplul de mai jos sunt indicate numai diferențele care se pot calcula plecând de la valorile date  $f_{-2}, \dots, f_3$ : s-a notat, simplificat,  $\Delta_j^r = \Delta^r f_j$ .



Diferențele implicate în formulele polinoamelor de interpolare se iau din diagramă, pe următoarele căi:

- Gregory-Newton – înainte: diagonala descendentă: 
- Gregory-Newton – înapoi: diagonala ascendentă: 
- Gauss – înainte: zigzag, primul pas descendent: 
- Gauss – înapoi: zigzag, primul pas ascendent: 

- Stirling: orizontala care începe de la  $f_0$  - pentru diferențele de ordin par; media diferențelor de ordin impar situate deasupra și dedesubtul acestei orizontale:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \Delta_{-1} & & \Delta_{-2}^3 & & \\
 f_0 & & & \Delta_{-1}^2 & & \Delta_{-2}^4 & \dots \\
 & & \Delta_0 & & \Delta_{-1}^3 & & 
 \end{array}$$

- Bessel: orizontala care începe între  $f_0$  și  $f_1$  - pentru diferențele de ordin impar; media diferențelor de ordin par situate deasupra și dedesubtul acestei orizontale:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_0 & & \Delta_{-1}^2 & & \Delta_{-2}^4 & & \\
 & \Delta_0 & & \Delta_{-1}^3 & & \Delta_{-2}^5 & \dots \\
 f_1 & & \Delta_0^2 & & \Delta_{-1}^4 & & 
 \end{array}$$

Diagrama poate fi completată și cu coeficienții diferențelor – v. Ralston & Rabinowitz (1978), Curtis (1978).

#### 4 Interpolare Hermite

Problema interpolării Hermite se pune în modul următor: considerăm  $n+1$  noduri  $x_0, x_1, \dots, x_n$  și presupunem că pe nodul  $x_i$  sunt date valorile funcției  $f$  și a derivatelor lui  $f$  până la ordinul  $k_i - 1$ :

$$f(x_i) = c_{i0}, f'(x_i) = c_{i1}, \dots, f^{(k_i-1)}(x_i) = c_{i,k_i-1}; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (54)$$

Fie  $m+1$  numărul condițiilor (54), adică

$$k_0 + k_1 + \dots + k_n = m + 1 \quad (54')$$

Căutăm polinomul  $p$ , de grad minim care satisface condițiile (54). Acesta va fi un polinom de grad cel mult  $m$ , având  $m+1$  coeficienți care se determină din sistemul liniar

$$p^{(j)}(x_i) = c_{ij}, \quad j = \overline{0, k_i - 1}; \quad i = \overline{0, n} \quad (55)$$

unde  $p^{(0)}(x) = p(x)$ .

#### Propoziția 1

Polinomul Hermite care satisface (55) există și este unic ■

Construcția efectivă a polinomului Hermite se poate face în forma Newton sau Lagrange. Vom considera prima variantă. Pentru a doua, v. de exemplu Kincaid & Cheney (1996), Ralston & Rabinowitz (1978).

Pentru construcție considerăm polinomul Newton scris pentru nodurile  $x_i, i = \overline{0, n}$ , unde nodul  $x_i$  apare de  $k_i$  ori, adică:

$$\underbrace{x_0, \dots, x_0}_{k_0}; \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k_1}; \dots; \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{k_n} \quad (58)$$

Notăm, pentru claritate, lista (58) a nodurilor cu:

$$y_0, y_1, \dots, y_{k_0-1}; y_{k_0}, \dots, y_{(k_0+k_1)-1}; \dots; y_{(k_0+\dots+k_{n-1})}, \dots, y_{m+1} \quad (58')$$

unde numărul total de noduri este  $k_0 + k_1 + \dots + k_n = m + 1$ , și corespondența cu nodurile  $x_i$  este:

$$y_j = x_0, \quad 0 \leq j \leq k_0 - 1;$$

$$y_j = x_1, \quad k_0 \leq j \leq (k_0 + k_1) - 1;$$

Etc.

Polinomul Newton pentru nodurile (58') este:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m+1} f[y_0, \dots, y_j] q_j(x) \quad (59)$$

unde:

$$q_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} (x - y_i), \quad q_0(x) = 1, \quad (60)$$

iar coeficienții sunt diferențele divizate *cu repetiție*, definite în 3.2.

### Exemplu

Fie nodurile  $x_0, x_1$ , cu multiplicățile 2, 3, adică se cere ca polinomul să reproducă valorile:  $f(x_0), f'(x_0), f(x_1), f'(x_1), f''(x_1)$ . Considerăm polinomul Newton pentru nodurile  $x_0, x_0, x_1, x_1, x_1$ . Avem:

$$q_0(x) = 1; \quad q_1(x) = (x - x_0); \quad q_2(x) = (x - x_0)^2;$$

$$q_3(x) = (x - x_0)^2(x - x_1); \quad q_4(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2.$$

$$p(x) = f_0 + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

în care:

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0);$$

$$f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0, x_1] - f'(x_0)}{x_1 - x_0};$$

$$f[x_0, x_0, x_1, x_1] = \frac{f[x_0, x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_1]}{x_1 - x_0},$$

în care:

$$f[x_0, x_1, x_1] = \frac{f[x_1, x_1] - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0} = \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1]}{x_1 - x_0};$$

$$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_1] = \frac{f[x_0, x_0, x_1, x_1] - f[x_0, x_1, x_1, x_1]}{x_1 - x_0}.$$

Folosind o notație simplificată, polinomul se scrie:

$$p(x) = f_0 + f_{00}(x - x_0) + f_{001}(x - x_0)^2 + f_{0011}(x - x_0)^2(x - x_1) + f_{00111}(x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

Calculul diferențelor se conduce, de exemplu, în tabelul următor: în coloana 1 se dau nodurile; în coloana 2 – valorile funcției și derivatelor; în coloanele 3 – 6, se calculează diferențele divizate; diferența pe  $k$  noduri coincidente se ia egală cu derivata de ordinul  $(k-1)$  pe nod, împărțită cu  $(k-1)!$ .

$$\begin{array}{l|llll}
 x_0 & f_0 & f_{00} = f'_0 & f_{001} & f_{0011} & f_{00111} \\
 x_0 & f'_0 & f_{01} & f_{011} & f_{0111} & \\
 x_1 & f_1 & f_{11} = f'_1 & f_{111} = \frac{1}{2} f''_1 & & \\
 x_1 & f'_1 & & & & \\
 x_1 & f''_1 & & & & 
 \end{array}$$

Exemplu numeric: considerăm nodurile 1, 2 (cu multiplicități 2, 3) și funcția

$f(x) = (x-1)^4$ . Tabelul de calcul este dat mai jos. În acesta: valorile subliniate sunt  $f_{00}$ ,  $f_{11}$  și  $f_{111}$ , calculate prin derivatele pe  $x = 1$  și  $x = 2$ ; celelalte diferențe divizate sunt calculate în mod obișnuit.

$$\begin{array}{l|llll}
 1 & 0 & \underline{0} & 1 & 2 & 1 \\
 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & \\
 2 & 1 & \underline{4} & \underline{6} & & \\
 2 & 4 & & & & \\
 2 & 12 & & & & 
 \end{array}$$

Polinomul este:

$$p(x) = (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) + (x-1)^2(x-2)^2$$

care, evident, reproduce  $f(x)$  ■

### Propoziția 2

Polinomul de interpolare Newton (59, 60) scris pentru nodurile  $x_i, i = \overline{0, n}$ , unde nodul  $x_i$  apare de  $k_i$  ori, este polinomul Hermite care satisface (55) ■

### Formula de interpolare Hermite

Punem, cu notațiile anterioare,

$$f(x) = p_m(x) + R_m(x) \quad (61)$$

unde  $p_m(x)$  este polinomul de interpolare Hermite pe  $m+1$  noduri multiple, iar  $R_m(x)$  este restul în formula de interpolare (61). Presupunând că funcția  $f$  are  $m+1$  derivate continue pe intervalul  $[a, b]$  care conține nodurile, se arată că restul este dat

de formula generală (5) – 1.2, Propoziția 2, considerând nodurile multiple. Adică, explicit,

$$R_m(x) = \frac{1}{(m+1)!} \prod_{i=1}^n (x - x_i)^{k_i} f^{(m+1)}(\xi)$$

unde  $\xi \in [a, b]$ .

■

## II. DERIVARE NUMERICĂ

Două probleme se pot pune pentru calculul numeric al derivatelor unei funcții:

1. Calculul derivatelor unei funcții definite numeric – adică prin valori în puncte date.
2. Calculul numeric al derivatelor unei funcții definite analitic.

A doua problemă se pune în cazul când funcția are o expresie complicată și este suficientă o aproximație a derivatei (în special pentru derivate de ordin superior).

Ambele probleme se pot rezolva utilizând polinoame de interpolare. Pentru a doua problemă se utilizează și așa-numita extrapolare Richardson.

### 1 Derivarea unei funcții definite numeric

Fie funcția  $f$  definită pe  $n+1$  puncte distincte  $x_0, \dots, x_n$  și  $p_n$  polinomul de interpolare pe aceste puncte. Atunci, o aproximație a derivatei de ordinul  $k < n$  este dată de

$$f^{(k)}(x) \cong p_n^{(k)}(x)$$

Problema este de a evalua eroarea acestei aproximații, adică a evalua restul în formula

$$f^{(k)}(x) = p_n^{(k)}(x) + R_n^{(k)}(x) \quad (62)$$

În particular, pentru derivata *întâia* pe un nod, putem proceda cum urmează.

Considerăm expresia (21) a restului în formula de interpolare a polinomului Newton:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \omega_n(x)$$

Dacă presupunem că există derivata  $f^{(n+1)}$ , atunci, din expresia anterioară rezultă că membrul doi este derivabil și derivând odată și făcând  $x = x_i$ , avem:

$$R'_n(x_i) = f[x_0, \dots, x_n, x_i] \omega'_n(x_i)$$

Cu Consecința 4.2 din 3.3, și explicitând  $\omega'_n(x_i)$ , rezultă:

$$R'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (63)$$

unde  $\min\{x_j\} < \eta < \max\{x_j\}$ . A deriva în continuare expresia restului nu conduce la formule practice.

Pentru derivatele de ordin superior, printr-o demonstrație analoagă cu cea a Propoziției 2 din 1.2, se obține următorul rezultat (Isaacson & Keller (1965)):

### ***Teoremă***

Fie funcția  $f$  definită pe  $[a, b]$  și având derivată  $f^{(n+1)}$  continuă pe  $[a, b]$ . Fie nodurile

$x_j \in [a, b]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , ordonate prin  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ . Atunci pentru orice  $k$ ,  $k \leq n$ ,

avem:

$$R_n^{(k)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n-k+1)!} \prod_{j=0}^{n-k} (x - \xi_j) \quad (64)$$

unde punctele  $\xi_j$  nu depind de  $x$  și sunt situate în intervalele

$$x_j < \xi_j < x_{j+k}, \quad j = 0, 1, \dots, n-k, \quad (64')$$

iar  $\eta = \eta(x)$  este situat într-un interval care conține  $x$  și punctele  $\xi_j$  ■

Dacă  $x, x_j \in [a, b]$  și  $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ , se obține marginea erorii sub forma

$$|R_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{(n-k+1)!} M |b-a|^{n-k+1} \quad (65)$$



Vom stabili marginea restului în următorul caz particular:  $k = 2$ ,  $x = x_i$ , și noduri echidistante cu  $h$ . Avem  $x_j < \xi_j < x_{j+2}$ ,  $j = \overline{0, n-2}$ , de unde rezultă:

$$0 \leq j \leq i-2: \quad x_i - \xi_j \leq x_i - x_j = (i-j)h$$

$$i-1 \leq j \leq n-2: \quad \xi_j - x_i \leq x_{j+2} - x_i = (j+2-i)h$$

Cu acestea:

$$|R_n^{(2)}(x_i)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\eta)|}{(n-1)!} h^{n-1} \prod_{j=0}^{i-2} (i-j) \prod_{j=i-1}^{n-2} (j+2-i)$$

sau

$$|R_n^{(2)}(x_i)| \leq \frac{i!(n-i)!}{(n-1)!} h^{n-1} |f^{(n+1)}(\eta)| \quad (66)$$

unde  $x_0 < \eta < x_0 + nh$ .

### Formule de derivare pe puncte echidistante

Considerăm în ceea ce urmează nodurile echidistante  $x = x_0 + jh$ ,  $j = \overline{0, n}$ , și următoarele polinoame de interpolare:

a) Newton – înainte (38):

$$\bar{P}_n(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 f_0 + \dots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

Avem  $f(x) \cong p(s)$ , unde  $x = x_0 + sh$ . Derivăm în funcție de  $s$  și facem  $s = 0$ . Ținând cont de

$$\left. \frac{d}{ds} \binom{s}{k} \right|_{s=0} = \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

se obține:

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{h} [\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\Delta^n f_0] + R'_n(x_0) \quad (67)$$

Restul este dat de (63), și anume:

$$R'_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} \prod_{j=1}^n (x_0 - x_j) = h^n (-1)^n \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{n+1} \quad (68)$$

unde  $x_0 < \eta < x_n$ .

b) Gauss – înainte, cu număr impar de noduri

( $2n+1$  noduri:  $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n}$ ) – v. (50b):

$$p_{2n}(x) = G_{2n+1}^F(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \binom{s+k-1}{2k} \Delta^{2k} f_{-k} + \binom{s+k}{2k+1} \Delta^{2k+1} f_{-k} \right] + \binom{s+n-1}{2n} \Delta^{2n} f_{-n}$$

Procedăm analog, derivând în funcție de  $s$  și făcând  $s = 0$ . Avem:

$$\left. \frac{d}{ds} \binom{s+k-1}{2k} \right|_{s=0} = (-1)^k \frac{k!(k-1)!}{(2k)!};$$

$$\left. \frac{d}{ds} \binom{s+k}{2k+1} \right|_{s=0} = (-1)^k \frac{k!^2}{(2k+1)!}.$$

Se obține:

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{h} \left\{ \Delta f_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[ \frac{k!(k-1)!}{(2k)!} \Delta^{2k} f_{-k} + \frac{(k)!^2}{(2k+1)!} \Delta^{2k+1} f_{-k} \right] + (-1)^n \frac{n!(n-1)!}{(2n)!} \Delta^{2n} f_{-n} \right\} \quad (69)$$

sau, explicit:

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{h} [\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_{-1} - \frac{1}{6} \Delta^3 f_{-1} + \frac{1}{12} \Delta^4 f_{-2} + \dots] \quad (69')$$

Restul este dat de (63), și anume:

$$R'_{2n}(x_0) = (-1)^n \frac{(n)!^2}{(2n+1)!} h^{2n} f^{(2n+1)}(\eta), \quad x_0 - nh < \eta < x_0 + nh \quad (70)$$

*Observație*

Dacă am utiliza aproximarea (67) pe  $2n+1$  noduri situate de aceeași parte a lui  $x_0$ , de exemplu  $x_0 + jh$ ,  $j = \overline{0, 2n}$ , restul sub forma (68) este:

$$R_{2n}^{(1)}(x_0) = h^{2n} \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{2n+1}, \quad x_0 < \eta < x_0 + 2nh \quad (71)$$

Presupunând că valoarea lui  $f^{(n+1)}(\eta)$  este *aceeași* pentru intervalele din (70) și (71), rezultă că avem  $|R'_{2n}(x_0)| \ll |R_{2n}^{(1)}(x_0)|$  care arată că aproximarea (69), cu noduri *centrate în jurul lui*  $x_0$ , este mai bună decât (67).

■

### Cazuri particulare

1) Derivata de ordinul întâi:

Pentru  $n = 1$  (3 noduri:  $x_0, x_1, x_{-1}$ ) se obține formula:

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{h} \{ \Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_{-1} \}, \text{ sau}$$

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{2h} [f_1 - f_{-1}], \quad (72a)$$

în care restul este:

$$R'_2(x_0) = -\frac{1}{6} h^2 f^{(3)}(\eta), \quad x_0 - h < \eta < x_0 + h.$$

Pentru  $n = 2$ , se obține formula:  $f'(x_0) \cong \frac{1}{h} [\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_{-1} - \frac{1}{6} \Delta^3 f_{-1} + \frac{1}{12} \Delta^4 f_{-2}]$ , sau

explicit:

$$f'(x_0) \cong \frac{1}{12h} [-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}], \quad (72b)$$

în care restul este  $O(h^4)$ .

2) Derivata de ordinul  $(2n - 1)$ :

Derivăm polinomul  $p_{2n}$  de  $2n - 1$  ori: întrucât  $\binom{s+k}{m}$  este un polinom de gradul  $m$ ,

derivatele de ordin  $> m$  sunt nule, astfel că derivata de ordinul  $(2n - 1)$  implică numai ultimii doi termeni din polinom. Pentru aceștia avem

$$\frac{d^{2n-1}}{ds^{2n-1}} \binom{s+n-1}{2n-1} = 1, \quad \left. \frac{d^{2n-1}}{ds^{2n-1}} \binom{s+n-1}{2n} \right|_{s=0} = -\frac{1}{2},$$

astfel că rezultă:

$$f^{(2n-1)}(x_0) \cong \frac{1}{h^{2n-1}} [\Delta^{2n-1} f_{-n+1} - \frac{1}{2} \Delta^{2n} f_{-n}]$$

în care, conform (65), eroarea este  $O(h^2)$ . Formula de mai sus se poate scrie și sub forma:

$$f^{(2n-1)}(x_0) \cong \frac{1}{2h^{2n-1}} [\Delta^{2n-1} f_{-n+1} + \Delta^{2n-1} f_{-n}]$$

■

c) Gauss – înainte, cu număr par de noduri

( $2n+2$  noduri:  $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}$ ) – v. (50a):

$$p_{2n+1}(x) = G_{2n+2}^F(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{s+k-1}{2k} \Delta^{2k} f_{-k} + \binom{s+k}{2k+1} \Delta^{2k+1} f_{-k} \right]$$

Acesta conduce la derivata de ordinul doi (mai general, la derivatele de ordin par).

Vom considera, pentru exemplificare cazul  $n = 1$  (noduri:  $x_0, x_1, x_{-1}, x_2$ ). Polinomul

este:

$$p_3(x) = G_4(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2} \Delta^2 f_{-1} + \frac{(s+1)s(s-1)}{6} \Delta^3 f_{-1}$$

Derivând de două ori, se obține  $G_4''(s) = \Delta^2 f_{-1} + s\Delta^3 f_{-1}$ , și făcând  $s = 0$  rezultă:

$$f''(x_0) \cong \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_{-1}$$

În general, avem:

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \binom{s+k}{2k+1} \right|_{s=0} = 0$$

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \binom{s+k-1}{2k} \right|_{s=0} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)! \cdot 2}{(2k)!}$$

cu care, rezultă:

$$f''(x_0) \cong \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(k-1)! \cdot 2}{(2k)!} \Delta^{2k} f_{-k} \quad (73)$$

Explicit, primii termeni ai sumei sunt:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \{ \Delta^2 f_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 f_{-2} + \frac{1}{180} \Delta^6 f_{-3} + \dots \} \quad (73')$$

Marginea erorii (66), în care:  $n \mapsto 2n+1$ ; nodurile ordonate crescător sunt

$x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ ;  $x_i = x_0$ , astfel că  $i = n$ , devine:

$$|R_{2n+1}^{(2)}(x_0)| \leq \frac{n!(n+1)!}{(2n)!} h^{2n} |f^{(2n+2)}(\eta)| \quad (74)$$

### Cazuri particulare

1) Derivata de ordinul 2:

Considerăm cazurile  $n = 1, 2$ . Avem:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_{-1}; \quad |R_3^{(2)}| \leq h^2 |f^{(4)}(\eta)|$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \{ \Delta^2 f_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 f_{-2} \}; \quad |R_5^{(2)}| \leq \frac{1}{2} h^4 |f^{(4)}(\eta)|$$

Explicit, aceste formule sunt:

$$f''(x_0) \cong \frac{1}{h^2} [f_1 - 2f_0 + f_{-1}] \quad (75a)$$

$$f''(x_0) \cong \frac{1}{12h^2} [-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}] \quad (75b)$$

Pentru prima formulă, o margine mai bună a erorii se obține adunând seriile Taylor a lui  $f(x_0 + h)$  și  $f(x_0 - h)$  (v. Cap. 5-III, 1.1.1), sub forma:

$$|R_3^{(2)}(x_0)| \leq \frac{1}{12} h^2 |f^{(4)}(\eta)|, \quad x_0 - h < \eta < x_0 + h.$$

2) Derivata de ordinul  $2n$ :

Derivăm polinomul  $p_{2n+1}$  de  $2n$  ori: derivata implică numai ultimii doi termeni ai sumei ( $k = n$ ). Pentru aceștia, avem:

$$\frac{d^{2n}}{ds^{2n}} \binom{s+n-1}{2n} = 1, \quad \frac{d^{2n}}{ds^{2n}} \binom{s+n}{2n+1} \Big|_{s=0} = 0,$$

astfel că rezultă:

$$f^{(2n)}(x_0) \cong \frac{1}{h^{2n}} \Delta^{2n} f_{-n},$$

în care eroarea, conform (65), este  $O(h^2)$ .

■

## 2 Extrapolarea Richardson

În cazul unei funcții definite analitic, calculul numeric al derivatelor se poate face prin formulele din 7.1, calculând în prealabil, valorile funcției pe un șir de noduri. Întrucât valorile funcției pot fi calculate în orice punct al intervalului de definiție, următorul procedeu permite ca, plecând de la două aproximații ale derivatei având același ordin al erorii, să se găsească o aproximație cu precizie mai mare. Procedeu se zice extrapolarea Richardson. Cele două valori ale derivatei se calculează cu cu pasul  $h$ , și respectiv, cu pasul  $h/2$ , cu o formulă de aproximare a cărei eroare are forma  $b_1 h^2 + b_2 h^4 + b_3 h^6 + \dots$ . Astfel, să calculăm  $f'$  cu formula (72a). Pentru evaluarea erorii folosim seriile Taylor

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + C_4 h^4 + C_5 h^5 + \dots,$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + C_2 h^2 - C_3 h^3 + C_4 h^4 - C_5 h^5 + \dots,$$

în care:  $C_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ . Scăzând cele două serii, rezultă:

$$f'(x_0, h) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] + C_3 h^2 + C_5 h^4 + \dots$$

0) Extrapolarea '0' – Aproximații de ordinul  $O(h^2)$ :

Aplicând formula pentru  $h, h/2, h/2^2 = h/4$ , avem aproximațiile:

$$f_0^{(0,1)} = f'_{0,h} \cong \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]$$

$$f_0^{(0,2)} = f'_{0,h/2} \cong \frac{1}{2(h/2)} [f(x_0 + h/2) - f(x_0 - h/2)],$$

$$f_0^{(0,3)} = f'_{0,h/4} \cong \frac{1}{2(h/4)} [f(x_0 + h/4) - f(x_0 - h/4)]$$

Notația indicilor superiori ( $i, j$ ) din membrul întâi au semnificația:  $i$  = indicele extrapolării (aici,  $i = 0$ );  $j$  = indicele aproximației. Erorile aproximațiilor de mai sus sunt de ordinul  $O(h^2)$  și sunt definite de:

$$f_0' = f_0^{(0,1)} + C_3 h^2 + C_5 h^4 + \dots \quad (\text{a})$$

$$f_0' = f_0^{(0,2)} + C_3 \frac{h^2}{2^2} + C_5 \frac{h^4}{2^4} + \dots \quad (\text{b})$$

$$f_0' = f_0^{(0,3)} + C_3 \frac{h^2}{2^4} + C_5 \frac{h^4}{2^8} + \dots \quad (\text{c})$$

1) Extrapolarea 1 – Aproximații de ordinul  $O(h^4)$ :

Dacă eliminăm termenul în  $h^2$  între (a), (b), și respectiv între (b), (c), rezultă:

$$f_0' = f_0^{(0,2)} + \frac{1}{2^2 - 1} (f_0^{(0,2)} - f_0^{(0,1)}) + O(h^4),$$

$$f_0' = f_0^{(0,3)} + \frac{1}{2^2 - 1} (f_0^{(0,3)} - f_0^{(0,2)}) + O(h^4)$$

Aproximațiile

$$f_0^{\prime(1,1)} = f_0^{\prime(0,2)} + \frac{1}{2^2 - 1} (f_0^{\prime(0,2)} - f_0^{\prime(0,1)}),$$

$$f_0^{\prime(1,2)} = f_0^{\prime(0,3)} + \frac{1}{2^2 - 1} (f_0^{\prime(0,3)} - f_0^{\prime(0,2)}),$$

are erorile date de:

$$f_0' = f_0^{\prime(1,1)} - (C_5 / 2^2)h^4 + O(h^6) \quad (d)$$

$$f_0' = f_0^{\prime(1,2)} - (C_5 / 2^2) \frac{h^4}{2^4} + O(h^6) \quad (e)$$

2) Extrapolarea 2 – Aproximații de ordinul  $O(h^6)$ :

Analog, eliminând termenul în  $h^4$  între (d) și (e), rezultă aproximația:

$$f_0^{\prime(2,1)} = f_0^{\prime(1,2)} + \frac{1}{2^4 - 1} (f_0^{\prime(1,2)} - f_0^{\prime(1,1)})$$

care va avea o eroare de ordinul  $O(h^6)$ . Pentru a continua procesul, avem nevoie de o a doua aproximație de ordinul  $O(h^6)$ ,  $f_0^{\prime(2,2)}$ . Pentru aceasta, se pornește cu încă o aproximație la pasul 0, și anume,  $f_0^{\prime(0,4)} = f_{0,h/8}'$ , etc.

3) În general, având două aproximații  $f_0^{\prime(i,1)}$  și  $f_0^{\prime(i,2)}$  calculate respectiv cu  $h'$  și

$h'/2$ , ambele cu erori de ordinul  $O(h^n)$ , formula de extrapolare este:

$$f_0^{\prime(i+1,1)} = f_0^{\prime(i,2)} + \frac{1}{2^n - 1} (f_0^{\prime(i,2)} - f_0^{\prime(i,1)}) \quad (76)$$

cu o eroare de ordinul  $O(h^{n+2})$ . Observați că  $f_0^{\prime(i,2)}$  notează aproximația mai exactă de la pasul anterior ■

Extrapolarea Richardson se poate aplica, în mod analog, pentru derivatele de ordinul doi, calculate cu (75a). Evaluarea erorii se face adunând seriile Taylor de mai sus. De exemplu, pentru prima aproximație, avem:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)] + 2C_4h^2 + 2C_6h^4 + \dots$$



### Observații

- 1) Procesul de extrapolare se oprește după un număr de pași, limitând mărimea pasului  $h/2^n$ , și prin testul  $|f_0^{(i,2)} - f_0^{(i,1)}| \leq eps$  unde  $eps$  este prescris.
- 2) Procesul de extrapolare prezentat utilizează șirul de pași  $\{h_i\}$ ,  $h_i \rightarrow 0$ , definit de  $h_1 = h$ ,  $h_{i+1} = (\frac{1}{2})h_i$ . Pentru cazul general  $h_{i+1} = \rho h_i$ ,  $\rho < 1$ , v. Ralston & Rabinowitz (1978)
- 3) În loc de extrapolare, pentru creșterea ordinului erorii de la  $O(h^{2n})$  la  $O(h^{2n+2})$ , se poate utiliza polinomul de interpolare de ordinul  $2n + 2$  (adică, adăugând încă două noduri la cele  $2n+1$  considerate în 7.1, b), și calculând derivata cu formula (69). V. expresia (70) a restului.

■

### Cod Fortran

Următorul cod implementează extrapolarea Richardson. Datele  $x_0, n, h$  se citesc dintr-un fișier de date:  $n$  este numărul aproximațiilor de la pasul '0';  $h$  este pasul inițial. Aproximațiile  $f_0^{(i,j)}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  sunt stocate în tabloul  $ff(0:n-1, n)$ .

Proiectul include sub-programul de tip `function`, care calculează  $f(x)$ . Ca exemplu, este considerată funcția  $f(x) = e^x$ .

```
! Extrapolare RICHARDSON pentru f'
! Sub-program: fun(x)
! Datele: x0, n, h - citite din fisier de date.
Program Extrapolation
character(255) fname, dummy*80
real, allocatable:: ff(:, :)

aprox(f1, f2, h) = (f2 - f1) / (2*h)
extrapol(f1, f2, n) = f2 + (f2 - f1) / (2**n - 1)

print '(a, \)', ' Input file:'
read '(a)', fname
```

```

open(1, file =fname, status ='old', form ='formatted')
read(1,'(a)') dummy
read(1,*) x, n, h0          ! h = h_inital

allocate (ff(0:n-1, n))
ff =0.D0;

! Aproximatii - 0:
h =2*h0
do i = 1, n
h =h/2
f1 =fun(x-h); f2 =fun(x+h);
ff(0, i) = aprox(f1, f2, h)
enddo

! Extrapolari= 1:N-1
MainDo: DO IE =1, N-1
ne =2*IE
do i =1, n-IE
ff(IE,i)= extrapol(ff(IE-1,i), ff(IE-1,i+1), ne)
enddo
ENDDO MainDo

! Write:
write (1, '(a, /)') 'ff: ';
DO ie = 0, n-1
    write (1, *) ie, ff(ie, 1:n-ie)
    write (1, *)
ENDDO

deallocate(ff)
END program extrapolation

function fun(x)
fun =exp(x)
end

```



### Exemplu

Pentru  $f(x) = e^x$ , să calculăm prin extrapolare  $f'(1.4)$ . Considerăm pasul inițial  $h = 0.05$  și  $n = 4$  (3 pași de extrapolare). Rezultatele, obținute cu programul prezentat mai sus, se dau în continuare: în prima coloană sunt indicii pașilor, iar în coloanele următoare aproximațiile. Calculul este făcut în simplă precizie. Valoarea exactă este 4.055 199 966 84.

0	4.056885	4.055200	4.055324	4.055233
1	4.055197	4.055225	4.055202	
2	4.055227	4.055201		
3	4.055200			

Aceeași valoare se obține cu  $h = 0.1$  și 4 pași de extrapolare; cu  $h = 0.5$ , 4 pași și  $h = 1.0$ , 3 pași, rezultă valoarea 4.055201. Cu  $h < 0.1$  se obțin valori mai puțin precise: de exemplu, cu  $h = 0.001$ , 4 pași, rezultă 4.052745. Rezultă că valoarea optimă pentru  $h$ , pentru exemplul considerat, se situează în plaja 1.0 ... 0.05. Acest rezultat poate fi generalizat: pentru  $h$  inițial, nu se vor lua valori excesiv de mici. O valoare în jurul lui 0.1 pare să convină pentru mai multe exemple ■

---