CURS 7
OPERATORI UTILIZAŢI ÎN DINAMICA STRUCTURILOR

1 Ecuaţiile Dinamicii structurilor

Vom considera ecuaţii de forma următoare:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t), \tag{1}$$

în care:

$\mathbf{U} = [u_1(t)\ \ldots\ u_n(t)]^T$ este vectorul gradelor de libertate $u_j,\ j = \overline{1,n}$; n este numărul gradelor de libertate;

$\mathbf{M} = [m_{lj}]$ este o matrice constantă $n \times n$ – matricea de masă. Matricea **M** este simetrică şi pozitiv definită.

$\mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = [g_1(u_1, \cdots, u_n, \dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n)\ \ldots\ g_n(u_1, \cdots, u_n, \dot{u}_1, \cdots, \dot{u}_n)]^T$ este funcţia de amortizare;

$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [f_1(u_1, \cdots, u_n)\ \ldots\ f_n(u_1, \cdots, u_n)]^T$ este funcţia de rigiditate; iar

$\mathbf{P}(t) = [p_1(t)\ \ldots\ p_n(t)]^T$ este funcţia de excitaţie.

Exemple de funcţii de amortizare:

$\mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}}$; $\qquad \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_2(\dot{\mathbf{U}})$.

Soluţia ecuaţiei (1) se mai zice *răspuns* (dinamic), şi anume: $\mathbf{U}(t)$ - răspuns în deplasări, $\dot{\mathbf{U}}(t)$ - răspuns în viteze, etc.

În particular, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}})$ şi funcţiile **f** şi **g** sunt liniare (sau $\mathbf{g}_1 = \mathbf{C} = constant$), sistemul se zice *liniar* şi ecuaţia (1) ia forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t), \tag{2}$$

în care $\mathbf{C} = [c_{lj}]$ şi $\mathbf{K} = [k_{lj}]$ sunt matrici constante $n \times n$, numite matricea de amortizare şi de rigiditate, respectiv. Matricea **K** este simetrică şi pozitiv definită. În particular, dacă **C** = **0**, ecuaţia (2) devine:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \qquad (2')$$

Condiţiile iniţiale pentru (1, 2) sunt:

$$\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0,\ \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{U}}_0, \qquad (3)$$

unde obişnuit, $t_0 = 0$. Pentru unii operatori este necesară şi acceleraţia iniţială $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$, care se determină din ecuaţia (1) sau (2) scrisă pentru $t = t_0$. De exemplu, pentru (1) rezultă:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{P}(t_0) - \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) \qquad (4)$$

Determinarea lui $\ddot{\mathbf{U}}^{(0)}$ revine la rezolvarea sistemului liniar (4).

Observaţie

În cazul **C = 0**, sau dacă **C** îndeplineşte o condiţie – v. mai jos, ecuaţiile liniare (2) se pot decupla cum urmează. Se consideră ecuaţia mişcării libere (**P** = **0**):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0}$$

care se integrează căutând soluţii de forma $\mathbf{U} = \mathbf{A}e^{i\omega t}$, obţinând

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Se arată că problema de valori proprii $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$ are valori proprii reale şi pozitive, astfel că $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Vectorii proprii **A** sunt ortogonali în raport cu **M** şi cu **K**, adică: $\mathbf{a}_i^T\mathbf{M}\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_i^T\mathbf{K}\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $j \neq i$. Considerăm matricea $\mathbf{\Phi}$ cu coloanele formate din vectorii proprii $\mathbf{A}_i$. Avem: $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = diag(M_l)$, $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = diag(K_l)$, şi $K_l = \omega_l^2 M_l$. Punem

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}\mathbf{Y}.$$

Înlocuind în (2) şi înmulţind la stânga cu $\mathbf{\Phi}^T$, rezultă

$$(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi})\ddot{\mathbf{Y}} + (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi})\dot{\mathbf{Y}} + (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}) \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(t).$$

Dacă matricea $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = diag(C_l)$, (în particular aceasta are loc dacă **C = 0** sau $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ **)** rezultă:

$$diag(M_l)\ddot{\mathbf{Y}} + diag(C_l)\dot{\mathbf{Y}} + diag(K_l)\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{P}}(t)$$

în care $\overline{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{P}(t)$. Sau,

$$\ddot{y}_l + 2\xi_l \omega_l \dot{y} + \omega_l^2 y_l = p_l(t), \quad l = \overline{1, n} \tag{5}$$

unde s-a pus $C_l / M = 2\zeta_l \omega_l$, $p_l(t) = \overline{P}_l(t) / M_l$, iar $K_l / M_l = \omega_l^2$. În particular, dacă **C** = **0**, avem:

$$\ddot{y}_l + \omega_l^2 y = p_l(t), \quad l = \overline{1, n} \tag{5'}$$

■

Ecuaţiile (1, 2) sunt reductibile la un sistem de ordinul unu şi pot fi integrate cu metodele expuse în Curs 6 – de exemplu metode Runge-Kutta, sau pot fi integrate cu metode pentru ecuaţii de ordinul doi. Totuşi, pentru ecuaţiile (1,2), s-au desvoltat metode speciale de integrare directă. O prezentare comparativă se dă în Dokainsh and Subbaraj (1989). O analiză a metodei diferenţelor centrale, Houbolt, Newmark şi Wilson, se dă în Bathe and Wilson (1976). Metoda Newmark este expusă în articolul autorului (1959), şi analizată în multe studii ulterioare. În această Secţiune vom prezenta câteva dintre aceste metode.

■

Un *operator de integrare directă* este constituit din două formule care dau expresia deplasării $\mathbf{U}_{i+1}$ şi vitezei $\dot{\mathbf{U}}_{i+1}$, în funcţie de valorile lui **U** şi derivatelor acestuia, pe pasul/paşii anteriori.

Clasificarea în operatori expliciţi/impliciţi şi operatori într-un singur pas/în mai mulţi paşi, dată în 6-I, se aplică.

2 Operatori expliciţi

Următorii operatori expliciţi sunt utilizaţi:

- Metoda diferenţelor centrale (ordin 2; explicită – numai dacă **g** este liniară)
- Metode Runge-Kutta (ordin 4)

  Metoda Runge-Kutta cere transformarea ecuaţiei (1, 2) într-un sistem echivalent de ordinul întâi.
- Se mai pot utiliza operatori multi-pas (liniari), expliciţi sau impliciţi, pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul doi.

Pentru aceasta, ecuaţia de ordinul doi $\ddot{u} = f(t,u,\dot{u})$ se transformă într-un sistem echivalent de ordinul întâi, adică:

$$\dot{u} = v$$
$$\dot{v} = f(t,u,v)$$

Apoi, se aplică un operator multi-pas (pentru fiecare din ecuaţii), în forma:

$$\sum_{l=0}^{k} a_l u_l = h\sum_{l=0}^{k} b_l v_l \ , \qquad \sum_{l=0}^{k} a_l v_l = h\sum_{l=0}^{k} b_l f_l \ ,$$

în care $f_l = f(t_l, u_l, v_l)$.

■

În particular, pentru *ecuaţii de forma* $\ddot{u} = f(t,u)$ (aceasta revine la ecuaţii (1) în care nu există amortizare: $\mathbf{g} = \mathbf{0}$), operatorul ia forma:

$$\sum_{l=0}^{k} a_l u_l = h^2 \sum_{l=0}^{k} b_l f_l \tag{6a}$$

unde $f_l = f(t_l, u_l)$.

Condiţiile de ordin pentru operatorul (6a), pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul doi *care nu conţine amortizare*, sunt analoage cu cele pentru ecuaţii de ordinul întâi – Curs 6, 4.2.1, şi anume (v. Hairer et al., 1987):

$$d_0 = \sum_{l=0}^{k} a_l = 0 \qquad\qquad (q = 0)$$

$$d_1 = \sum_{l=0}^{k} l a_l - \sum_{l=0}^{k} b_l = 0 \qquad\qquad (q = 1)$$

$$d_q = \sum_{l=0}^{k} l^q a_l - q(q-1)\sum_{l=0}^{k} l^{q-2} b_l = 0, \qquad q = 2,\dots, p+1 \tag{6b}$$

$$d_{p+2} = \sum_{l=0}^{k} l^{p+2} a_l - (p+2)(p+1)\sum_{l=0}^{k} l^{p} b_l \neq 0 \qquad (q = p+2)$$

Ordinul operatorului (6a) este numărul natural p pentru care avem

$$d_0 = 0,\ d_1 = 0, \dots,\ d_{p+1} = 0 \text{ şi } d_{p+2} \neq 0 .$$

Ele asigură că formula pentru u este exactă pentru un polinom de grad p , şi nu mai este exactă pentru un polinom de grad $p+1$.

■

2.1 Metoda diferenţelor centrale

Vom expune *metoda diferenţelor centrale*: vom da formulele pentru o singură ecuaţie (n = 1), generalizând apoi, la un sistem.

2.1.1 Formulele metodei

Presupunem că u admite derivate continue până la ordinul 4 inculsiv. Desvoltările Taylor pentru $u(t + h)$ şi $u(t - h)$ dau:

$$u(t+h) = u(t) + h\dot{u}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{u}(t) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_1); \qquad t < \xi_1 < t+h$$

$$u(t-h) = u(t) - h\dot{u}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{u}(t) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_2); \qquad t-h < \xi_2 < t$$

Adunând relaţiile anterioare şi explicitând $\ddot{u}(t)$, se obţine:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{h^2}[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{24}[u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]$$

Cu teorema Darboux avem $[u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]/2 = u^{(4)}(\xi)$, unde $t - h < \xi < t + h$. Rezultă:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{h^2}[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi); \qquad t-h < \xi < t+h$$

Analog, scăzând desvoltările Taylor (până la termenul în $u^{(3)}$), şi împărţind cu 2h, se obţine:

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2h}[u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{12}[u^{(3)}(\eta_1) + u^{(3)}(\eta_2)]$$

sau

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2h}[u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta); \qquad t-h < \eta < t+h$$

Rescriem relaţiile anterioare pentru $t = t_i$, $t + h = t_{i+1}$, $t - h = t_{i-1}$:

$$\ddot{u}(t_i) = \frac{1}{h^2}[u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i''; \qquad T_i'' = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi) \qquad \text{(7a)}$$

$$\dot{u}(t_i) = \frac{1}{2h}[u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i'\,; \qquad T_i' = -\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta) \qquad (7b)$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$. Metoda diferenţelor centrale constă în a aproxima derivatele $\ddot{u}$ şi $\dot{u}$ prin primul termen din membrul doi al relaţiilor anterioare. Notând cu $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ aproximaţiile pentru $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$, rezultă formulele metodei:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \qquad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) \qquad (8b)$$

Erorile de trunchiere (locale) ale formulelor (8a) şi (8b) sunt date în (7a) şi (7b).

Pentru un sistem, avem:

$$\dot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{2h}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}) \qquad (9a)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{h^2}(\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) \qquad (9b)$$

Pentru erorile de trunchiere locale în (9a, 9b), considerăm relaţiile (7a, 7b) scrise pentru fiecare coordonată $j = \overline{1,n}$; astfel, rezultă:

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2}(\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i'' \qquad (9c)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h}(\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i' \qquad (9d)$$

în care:

$$\mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12}[\ldots, u_j^{(4)}(\xi_j), \ldots]^T, \qquad \mathbf{T}_i' = -\frac{h^2}{6}[\ldots, u_j^{(3)}(\eta_j), \ldots]^T$$

Rezultă şi:

$$\|\mathbf{T}_i''\|_\infty \le \frac{h^2}{12}C_4, \quad \|\mathbf{T}_i'\|_\infty \le \frac{h^2}{6}C_3,$$

unde $|u_j^{(4)}(t)| \le C_4$, $|u_j^{(3)}(t)| \le C_3$.

2.1.2 Integrarea ecuaţiei (1, 2)

Înlocuind (9a, b), în (1) scrisă pentru momentul $t = t_i$, se obţine:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) \equiv$$
$$\frac{\mathbf{M}}{h^2}\cdot\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1}-\mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + \frac{\mathbf{M}}{h^2}\cdot(-2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) - \mathbf{P}(t_i) = 0 \quad (10)$$

Ecuaţia neliniară (10) se rezolvă, cu o metodă pentru ecuaţii neliniare, în necunoscuta $\mathbf{U}_{i+1}$. Pentru $i = 0$ este necesară valoarea $\mathbf{U}_{-1}$, care se determină din (9a, b) scrise pentru $i = 0$, şi eliminând $\mathbf{U}_1$. Rezultă:

$$\mathbf{U}_{-1} = \mathbf{U}_0 - h\dot{\mathbf{U}}_0 + (h^2/2)\ddot{\mathbf{U}}_0$$

Pentru cazul ecuaţiei liniare (2), ecuaţia (10) devine liniară în $\mathbf{U}_{i+1}$, şi anume:

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{P}(t_i) - (\mathbf{K} - 2\mathbf{M}/h^2)\cdot\mathbf{U}_i - (\mathbf{M}/h^2 - \mathbf{C}/2h)\cdot\mathbf{U}_{i-1} \quad (10')$$

în care: $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/h^2 + \mathbf{C}/2h$. Coeficienţii lui $\mathbf{U}_l$, $l = i+1, i, i-1$ se calculează la început, şi se utilizează la toţi paşii.

Mai general, ecuaţia (10) devine liniară în $\mathbf{U}_{i+1}$ dacă **g** este liniară.

2.1.3 Stabilitate (liniară)

Stabilitatea liniară se consideră pentru ecuaţia liniară (2'), cu **P** = **0**. Întrucât aceasta se decuplează în forma (6), stabilitatea se discută pentru o singură ecuaţie de forma

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (11)$$

(Ecuaţia (11) este echivalentul ecuaţiei de test $x' = \lambda x$; derivând, înlocuind x' şi punând $\lambda = i\omega$ se obţine forma (11)). Cu (8a), ecuaţia (11) devine:

$$u_{i+1} - (2 - h^2\omega^2)u_i + u_{i-1} = 0 \quad (12)$$

Căutăm soluţii de forma $u_j = r^j$, rezultă că r este soluţie a ecuaţiei (caracteristice)

$$r^2 - (2 - x^2)r + 1 = 0 \quad (12')$$

unde s-a pus, pentru moment, $x = h\omega$.

Pentru ca soluţia ecuaţiei (12) *să rămână mărginită* trebuie ca rădăcinile ecuaţiei (12') să satisfacă condiţia $|r| \le 1$, iar rădăcinile de modul 1 să fie cel mult duble – v. Hairer et al., 1987.

Avem: $\Delta = x^2(x^2 - 4)$. Dacă rădăcinile sunt reale şi distincte ($x > 2$), condiţia nu poate fi îndeplinită (avem $r_1 r_2 = 1$). Pentru rădăcini complexe ($x < 2$) rezultă $|r|^2 = 1$, şi $r_1 \ne r_2$. Cazul $x = 2$ conduce la $r_{1,2} = -1$, care convine. Urmează că trebuie să avem $x = h\omega \le 2$, sau

$$h \le \frac{2}{\omega}.$$

Pentru un sistem, considerând ecuaţiile (6) pentru $i = \overline{1,n}$, rezultă condiţia

$$h \le \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{13}$$

unde $\omega_{\max} = \max\limits_{i=1,n} \omega_i$. Cu $T = 2\pi/\omega$, condiţia (12) se pune şi sub forma $h \le \dfrac{T_{\min}}{\pi}$

■

Mai general, stabilitatea se poate discuta pentru ecuaţia (5) cu amortizare ($\zeta > 0$):

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{14}$$

Procedând ca mai sus, se obţine ecuaţia cu diferenţe:

$$(1 + \zeta\omega h)u_{i+1} - (2 - h^2\omega^2)u_i + (1 - \zeta\omega h)u_{i-1} = 0$$

şi ecuaţia caracteristică (unde $x = h\omega$):

$$(1 + \zeta x)r^2 - (2 - x^2)r + (1 - \zeta x) = 0.$$

a) Cazul $0 < \zeta < 1$ (amortizare sub-critică):

- Rădăcini complexe sau egale: $x \le 2\sqrt{1-\zeta^2}$. Condiţia de rădăcini de mai sus este verificată.

- Radăcini reale: $x > 2\sqrt{1-\zeta^2}$. Condiţia de rădăcini conduce la $x \le 2$, aşadar $2\sqrt{1-\zeta^2} < x \le 2$.

Reunind soluţiile celor două sub-cazuri, rezultă:

$$h \le \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{15}$$

b) $\zeta \ge 1$ (amortizare critică/supra-critică). Se obţine: $x \le \zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}$. Rezultă:

$$h < \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}}{\omega_{\max}}. \tag{15'}$$

Marginile din (15, 15') se numesc *limita de stabilitate* (liniară).

2.1.4 Eroarea de trunchiere locală în $\mathbf{U}_{i+1}$

Reluăm (9c, 9d):

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2}[\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}_i''; \qquad \mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12}\mathbf{C}_4 \tag{9c}$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h}[\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}_i'; \qquad \mathbf{T}_i' = -\frac{h^2}{6}\mathbf{C}_3 \tag{9d}$$

Ecuaţia din care se determină $\mathbf{U}_{i+1}$ (ecuaţia scrisă pentru t_i), este:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2}(\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) - \mathbf{P}(t_i) = 0$$

Presupunem că $\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i$ sunt exacte. Avem:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot (\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i) - \mathbf{P}(t_i) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Pe de altă parte:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t_i) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i)) = \mathbf{P}(t_i)$$

Scăzând din aceasta relaţia precedentă, se obţine:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}_i'' + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) - \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Sau:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}_i'' + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}_i' - \mathbf{T}_{i+1} = 0,$$

unde **G** este jacobianul lui **g** *în raport cu* $\dot{\mathbf{U}}$, iar ξ este pe segmentul care uneşte punctele $\dot{\mathbf{U}}(t_i)$ şi $(\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1}))/2h$. Rezultă:

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{T}_i'' + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}_i',$$

sau

$$\mathbf{T}_{i+1} = -\frac{h^2}{12}(\mathbf{MC}_4 + 2\mathbf{G}(\xi)\mathbf{C}_3)$$

■

2.1.5 Eroarea de trunchiere globală în u_i şi ordin

Punem: $u(t_i) = u_i + e_i$, $\dot{u}(t_i) = \dot{u}_i + e_i'$. Se arată că avem:

$$|e_i| \le Ch^2.$$

Ordin

Cum eroarea de trunchiere globală în u_i este $O(h^2)$, rezultă că metoda are ordinul $p = 2$ ■

Propoziţie

Dacă $f'(u) \ge F^* > 0$ și $\partial g(u,\dot{u})/\partial\dot{u} > 0$, atunci metoda are ordinul $p = 2$

■

Exemplu: pentru ecuaţia liniară, avem: $f'(u) = k,\ g'(\dot{u}) = c$.

Demonstraţia:

Tratăm problema pentru o singură ecuaţie. Pentru un sistem, demonstraţia este analogă.

Fie ecuaţia (1) pentru n = 1:

$$m\ddot{u} + g(u,\dot{u}) + f(u) = p(t) \tag{16}$$

Reluăm formulele (7, 8):

$$\ddot{u}(t_i) = \frac{1}{h^2}[u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i''; \qquad T_i'' = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i) \tag{7a}$$

$$\dot{u}(t_i) = \frac{1}{2h}[u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i'; \qquad T_i' = -\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta_i) \tag{7b}$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$.

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \qquad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) \qquad (8b)$$

Scăzând (8a, 8b) respectiv din (7a, 7b), avem:

$$e_i'' = \frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + T_i''$$

$$e_i' = \frac{1}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1}) + T_i'$$

S-a pus: $e_i = u(t_i) - u_i$; $e_i' = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i$; $e_i'' = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i$.

Pe de altă parte, din

$$m\ddot{u}(t_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) + f(u(t_i)) = p(t_i)$$

şi

$$m\ddot{u}_i + g(u_i, \dot{u}_i) + f(u_i) = p(t_i)$$

rezultă:

$$m(\ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) - g(u_i, \dot{u}_i)) + f(u(t_i) - f(u_i)) = 0$$

Sau:

$$e_i'' + \frac{1}{m}\left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')e_i + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')e_i'\right] + \frac{1}{m} f'(\eta_i')e_i = 0,$$

unde ξ_i' şi η_i' sunt, respectiv, *între* $\dot{u}(t_i), \dot{u}_i$ şi $u(t_i), u_i$.

Înlocuind e_i'' şi e_i', rezultă:

$$\frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) - \frac{h^2}{12}C_{4i} + \frac{1}{m}\left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')\frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')\frac{1}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1})\right]$$
$$- \frac{h^2}{6}C_{3i} + \frac{1}{m} f'(\eta_i')e_i = 0$$

unde: $C_{4i} = u^{(4)}(\xi_i), C_{3i} = u^{(3)}(\eta_i)$.

Punâd $\beta_i = \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')/m$, $\gamma_i = \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')/2m$, $\varphi_i = f'(\eta_i')/m$, avem:

$$(1+\beta_i)(e_{i+1}-2e_i+e_{i-1})+\gamma_i h(e_{i+1}-e_{i-1})+h^2\varphi_i e_i-\frac{h^4}{12}(C_{4i}+2C_{3i})=0$$

$$e_{i+1}(1+\beta_i+h\gamma_i)-(2+2\beta_i-h^2\varphi_i)e_i+e_{i-1}(1+\beta_i-h\gamma_i)=h^4C_i\,,$$

unde $C_i=(C_{4i}+2C_{3i})/12$.

Introducem coeficienţii:

$$a_{i+1}=1+\beta_i+h\gamma_i\,;\qquad a_i=2+2\beta_i-h^2\varphi_i\,;\qquad a_{i-1}=1+\beta_i-h\gamma_i\,.$$

Am presupus: $f'(u)>0$ și $\partial g(u,\dot{u})/\partial\dot{u}>0$. Astfel, pentru *h* suficient de mic, coeficienţii a_{i+1},a_i,a_{i-1} sunt *pozitivi*. În plus, avem:

$$a_{i+1}+a_{i-1}-a_i=h^2\varphi_i$$

Rezultă:

$$a_{i+1}e_{i+1}-a_ie_i+a_{i-1}e_{i-1}=h^4C_i\,,$$

Sau

$$a_ie_i+h^4C_i=a_{i+1}e_{i+1}+a_{i-1}e_{i-1}$$

Luând modulele, şi ţinând cont de $a_j>0$, rezultă:

$$a_ie_i+h^4|C_i|\geq a_{i+1}|e_{i+1}|+a_{i-1}|e_{i-1}|$$

Sau:

$$a_ie_i+h^4C\geq a_{i+1}|e_{i+1}|+a_{i-1}|e_{i-1}|$$

unde $|C_i|\leq C$.

Fie

$$e=\max_{j=1,n}|e_j|,$$

şi *I* indicele pe care este realizat maximul: $e=|e_I|$.

Avem $a_Ie\geq a_ie_i$, şi rezultă:

$$a_Ie+h^4C\geq a_{i+1}|e_{i+1}|+a_{i-1}|e_{i-1}|.$$

Relaţia anterioară are loc *pentru orice i* (membrul întâi nu depinde de *i*): atunci, pentru $i+1=I$, rezultă:

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{i-1} \, | e_{i-1} \, | .$$

Şi, analog, pentru $i-1=I$

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{I-1} e$$

Rezultă:

$$e(a_{I+1} + a_{I-1} - a_I) \leq h^4 C$$

Sau:

$$h^2 \varphi_I e \leq h^4 C$$

$$e \leq h^2 \frac{C}{\varphi_I}$$

În fine, ţinând cont de $\varphi_i = f'(\eta_i')/m$ şi de $f'(u) \geq F^* > 0$ şi, avem:

$$e \leq h^2 \frac{mC}{F^*}$$

Aceasta arată că metoda are ordinul $p=2$.

■

3 Operatori impliciţi

Vom prezenta operatorul Newmark (ordinul 2), şi un operator cu precizie mai mare (de ordinul 3), care generalizează operatorul Newmark.

3.1 Operatorul NEWMARK

Acesta este unul dintre cel mai utilizaţi operatori, datorită caracteristicilor sale de stabilitate, în ciuda ordinului său relativ mic.

3.1.1 Formulele operatorului

Vom prezenta formulele pentru o singură ecuaţie, generalizând apoi, la sistem. Formulele propuse de Newmark sunt (Newmark (1959)):

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1} \tag{22}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1-\gamma)h\ddot{u}_i + \gamma h\ddot{u}_{i+1} \tag{23}$$

Se arată că dacă $\gamma \neq \frac{1}{2}$, metoda introduce o amortizare artificială a răspunsului în deplasări, proporţională cu $\gamma - \frac{1}{2}$. Luând $\gamma = \frac{1}{2}$, formula (23) devine:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \tfrac{1}{2}h\ddot{u}_i + \tfrac{1}{2}h\ddot{u}_{i+1} \tag{23'}$$

Formulele (22, 23') sunt controlate de parametrul β, de aceea metoda se mai zice metoda β-Newmark. Operatorul este implicit, întrucât conţine în membrul doi $\ddot{u}_{i+1}$. Se observă că formulele (22, 23') pot fi scrise sub forma:

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\Delta\ddot{u}_{i+1} \tag{24a}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + h\ddot{u}_i + \gamma h\Delta\ddot{u}_{i+1} \tag{24b}$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_{i+1} \tag{24c}$$

unde $\Delta\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i$ reprezintă creşterea de acceleraţie la sfârşitul intervalului. Astfel, formulele estimează restul în seria Taylor a funcţiilor u şi $\dot{u}$ (Chisăliţă A. et al.(1990)).

Vom considera, în ceea ce urmează, forma (24 a-c) a formulelor Newmark. Pentru un sistem, acestea sunt:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \overline{\mathbf{U}}_{i+1} + \beta h^2\Delta\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{25a}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{i+1} = \overline{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} + \gamma h\Delta\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{25b}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{U}}_i + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{25c}$$

în care, funcţiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate, şi anume:

$$\overline{\mathbf{U}}_{i+1} = \mathbf{U}_i + h\dot{\mathbf{U}}_i + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{26a}$$

$$\overline{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_i + h\ddot{\mathbf{U}}_i \tag{26b}$$

3.1.2 Integrarea ecuaţiei (1)

Notăm, pentru simplificarea scrierii, cu 1 indicele pasului curent, şi 0 indicele pasului anterior ($t_i = t_0,\, t_{i+1} = t_1$). Înlocuind (25 a, b, c) în (1) scrisă pentru $t = t_1$, rezultă:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{g}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1,\, \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1) \tag{27}$$

Sau notând

$$\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1,$$

ecuaţia (27) devine:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0} \tag{28a}$$

în care

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{g}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W},\, \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \mathbf{f}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{P}(t_1) \tag{28b}$$

Ecuaţia (28a) se rezolvă cu metoda Newton, sau cu iteraţia de punct fix. Rezolvarea trebuie făcută pe fiecare pas de integrare, pentru a calcula $\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ (adică $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_{i+1}$, pentru pasul general i+1).

În cazul unui sistem liniar (2), $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ se determină din ecuaţia liniară

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{C}(\overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{K}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1)$$

sau

$$\tilde{\mathbf{M}}\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 = \tilde{\mathbf{P}},$$

unde:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \gamma h\mathbf{C} + \beta h^2\mathbf{K}, \qquad \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}\cdot\overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{K}\cdot\overline{\mathbf{U}}_1).$$

Metoda Newton

Notăm cu **J**(**W**) jacobianul funcţiei **F**, adică:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{W}) = \mathbf{M} &+ \beta h^2 \mathbf{B}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W},\, \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) \\ &+ \gamma h \mathbf{C}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W},\, \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \beta h^2 \mathbf{A}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W})\end{aligned} \tag{29a}$$

în care: **B** şi **C** sunt jacobienii lui **g** în raport cu **U** şi $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; iar **A** este jacobianul lui **f**. Explicit:

$$\mathbf{B}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial u_j]_{i,j=1,n}; \quad \mathbf{C}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial \dot{u}_j]_{i,j=1,n};$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = [\partial f_i / \partial u_j]_{i,j=1,n} \qquad (29b)$$

în care **B** şi **A** sunt jacobienii funcţiilor **g** şi **f**, respectiv.

Pentru un sistem liniar (2), avem $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, **C** = constant, **A** = **K** (constant).

Schema de iterare este (v. 3-IV, 2.2):

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}_n) = -\mathbf{F}(\mathbf{W}_n) \qquad (29a)$$

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \qquad (29b)$$

Iteraţia (29) se continuă până când unul din testele următoare este satisfăcut:

$\| \delta_{n+1} \| \le \varepsilon$, numărul de iteraţii ≤ *LNIT*,

unde ε şi *LNIT* sunt aleşi dinainte. În general, sunt suficiente un număr redus de iteraţii, şi metoda Newton se recomandă pentru rezolvarea ecuaţiei (28).

Metoda punctului fix. Limită de convergenţă.

Ecuaţia (28) se poate pune sub forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{G}(\mathbf{W}) \qquad (30)$$

în care:

$$\mathbf{G}(\mathbf{W}) =$$
$$\mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{g}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}, \dot{\overline{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) - \mathbf{f}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{P}(t_1)] - \ddot{\mathbf{U}}_0 \qquad (31b)$$

Pentru convergenţa iteraţiei $\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{G}(\mathbf{W}_j)$, $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$, este suficient ca:

$$\| \mathbf{J}_G(\mathbf{W}) \|_\infty < 1$$

unde $\mathbf{J}_G(\mathbf{W})$ este jacobianul lui **G**. Aceasta conduce la condiţia (Chisăliţă A. et al. (1991))

$$h < h_c, \quad h_c = \frac{-b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + 4(M/n)a\beta}}{2a\beta},$$

în care $1/M = \|\mathbf{M}^{-1}\|_\infty$, iar $|\partial g_l / \partial \dot{u}_j| < b$ şi $|\partial f_l / \partial u_j| < a$, respectiv. În particular, pentru o singură ecuaţie (n = 1) de tipul (5), avem m = 1, $b = 2\zeta\omega$, $a = \omega^2$, şi rezultă:

$$h_c = \frac{-\zeta\gamma + \sqrt{\zeta^2\gamma^2 + \omega^2\beta}}{\omega^2\beta}.$$

Pentru ζ = 0, se regăseşte rezultatul din Newmark (1959), $h_c = 1/(\omega\sqrt{\beta})$.

3.1.3 Stabilitatea operatorului Newmark (stabilitatea liniară)

Vom urma, cu titlu de exerciţiu, ideea tratării din Newmark (1959). Considerăm ecuaţia liniară de tipul (6)

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

şi formula (22) scrisă pentru i+1 şi pentru i. Avem:

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_i = u_{i-1} + h\dot{u}_{i-1} + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{u}_{i-1} + \beta h^2\ddot{u}_i$$

Scăzând cele două relaţii, obţinem:

$$u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1} + h(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) + \beta h^2(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

Din (23) evaluăm:

$$h(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) = (1-\gamma)h^2\ddot{u}_i + \gamma h^2\ddot{u}_{i+1} = h^2\ddot{u}_{i-1} + \gamma h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

Înlocuind, şi punând în evidenţă un termen în $(\gamma - \tfrac{1}{2})$, se obţine:

$$u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} - \beta h^2\ddot{u}_{i+1} - \beta h^2\ddot{u}_{i-1} - (1-2\beta)h^2\ddot{u}_i - (\gamma - \tfrac{1}{2})h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

În fine, înlocuind din ecuaţia diferenţială $\ddot{u} = -\omega^2 u$, se obţine ecuaţia cu diferenţe:

$$u_{i+1} - (2-\alpha^2)u_i + u_{i-1} + (\gamma - \tfrac{1}{2})\alpha^2(u_i - u_{i-1}) = 0$$

în care:

$$\alpha^2 = \frac{h^2\omega^2}{1 + \beta h^2\omega^2}$$

Ţinând cont că $u_i - u_{i-1} \cong h\dot{u}_{i-1}$, ultimul termen din ecuaţia cu diferenţe de mai sus are forma unei forţe de amortizare $c\dot{u}$, introdusă artificial de metodă. Coeficientul de amortizare este proporţional cu $(\gamma - \frac{1}{2})$. Pentru a exclude aceasta, luăm $\gamma = \frac{1}{2}$ şi avem:

$$u_{i+1} - (2-\alpha^2)u_i + u_{i-1} = 0 \qquad (31)$$

Ecuaţia cu diferenţe (31) a fost întâlnită în 2.1.3 – ecuaţia (12). Ecuaţia caracteristică este (12') în care $x = \alpha$. Utilizând rezultatul din 2.1.3, pentru stabilitate trebuie să avem $\alpha \le 2$, care conduce la condiţiile:

$$\beta \ge \tfrac{1}{4}: \quad \forall h > 0$$

$$\beta < \tfrac{1}{4}: \quad h < \frac{2}{\omega\sqrt{1-4\beta}}$$

Coeficientul β se alege astfel că $\beta \le \frac{1}{4}$. Pentru $\beta = \frac{1}{4}$, metoda este stabilă pentru orice h şi se zice *necondiţionat stabilă* ■

Tratarea stabilităţii pentru ecuaţia cu amortizare (5) este mult mai complexă. Pentru aceasta se va utiliza metoda expusă mai jos, în 3.3. Vom da numai rezultatele numai pentru cazul de interes $\gamma \ge \frac{1}{2}$ (amortizare pozitivă):

$$\beta \ge \frac{\gamma}{2}: \quad \forall h \ \text{(independent de } \zeta\text{)}$$

$$\beta < \frac{\gamma}{2}: \quad h < \frac{1}{\omega}x_2,$$

unde $x_2 = [\zeta(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\Delta}]/(\gamma/2 - \beta)$, $\Delta = \zeta^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\gamma/2 - \beta)^2$.

Adăugăm că, pentru $\zeta = 0$, operatorul este instabil dacă $\gamma < \frac{1}{2}$.

3.1.4 Eroarea de trunchiere locală

Considerăm cazul unei singure ecuaţii, rezultatele generalizându-se la un sistem. Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (24a, b), în care aproximaţiile u_i, $\dot{u}_i$, etc. se înlocuiesc cu valorile exacte $u(t_i)$, $\dot{u}(t_i)$, etc.. Astfel, definim

$$u(t_{i+1}) = \bar{u}(t_i) + \beta h^2(\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T_{i+1}$$

$$\dot{u}(t_{i+1}) = \bar{\dot{u}}(t_i) + \gamma h(\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T'_{i+1}$$

în care $\bar{u}(t), \bar{\dot{u}}(t)$ sunt seriile Taylor trunchiate până la termenul în h^2. Avem:

$$u(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i) = \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi), \quad \dot{u}(t_{i+1}) - \bar{\dot{u}}(t_i) = \frac{h^2}{2} u^{(3)}(\xi'),$$

$$\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i) = h u^{(3)}(\eta),$$

unde $\xi, \xi', \eta \in (t_i, t_{i+1})$. Rezultă:

$$T_{i+1} = h^3(\frac{1}{6} u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta)), \qquad T'_{i+1} = h^2(\frac{1}{2} u^{(3)}(\xi') - \gamma u^{(3)}(\eta))$$

Dacă $\gamma = \frac{1}{2}$, avem:

$$T'_{i+1} = \frac{h^2}{2}(u^{(3)}(\xi') - u^{(3)}(\eta)) = \frac{h^2}{2}(\xi' - \eta) u^{(4)}(\zeta')$$

unde $t_i < \zeta' < t_{i+1}$. Rezultă astfel (pentru $\gamma = \frac{1}{2}$):

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \qquad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1}, \tag{32}$$

în care:

$$C_{i+1} = \frac{1}{6} u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta), \qquad C'_{i+1} = \frac{1}{2} \frac{(\xi' - \eta)}{h} u^{(4)}(\zeta') \tag{32a}$$

Punând $|u^{(3)}(t)| \le M_3, \quad |u^{(4)}(t)| \le M_4$, avem:

$$|C_{i+1}| \le (\tfrac{1}{6} + \beta) M_3, \qquad |C'_{i+1}| \le \tfrac{1}{2} M_4 \tag{32b}$$

În particular, dacă $\beta = \frac{1}{6}$, se obţine

$$T_{i+1} = h^4 C_{i+1}, \tag{33}$$

$$C_{i+1} = \frac{1}{6} u^{(4)}(\zeta), \qquad |C_{i+1}| \le \frac{1}{6} M_4 \tag{33a}$$

unde $t_i < \zeta < t_{i+1}$. Rezultă:

$$T_{i+1} = O(h^3), \qquad T'_{i+1} = O(h^3).$$

În particular, pentru $\beta = \frac{1}{6}$, se obţine $T_{i+1} = O(h^4)$.

3.1.5 Ordin

Considerăm în ceea ce urmează, cazul $\gamma = \frac{1}{2}$. Avem, conform (32),

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \qquad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1},$$

unde C_{i+1}, C'_{i+1} sunt mărginiţi ca în (32a, 33a).

Cum erorile de trunchiere locală sunt de ordinul lui h^3, rezultă:

Propoziţia 1

Metoda Newmark cu $\gamma = \frac{1}{2}$ are ordinul $p = 2$ ■

Operatorul în forma multi-pas. Ordinul 4.

Operatorul Newmark se poate pune în forma multi-pas, cum urmează. Pentru convenienţă, scriem ecuaţia diferenţială sub forma:

$$\ddot{u} = \varphi(u, \dot{u}, t)$$

şi notăm: $\ddot{u}_0 = \varphi_0 = \varphi(u_0, \dot{u}_0, t_0)$, $\ddot{u}_1 = \varphi_1 = \varphi(u_1, \dot{u}_1, t_1)$. Formulele Newmark devin:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\varphi_0 + \beta h^2(\varphi_1 - \varphi_0) \\ \dot{u}_1 &= \dot{u}_0 + h\varphi_0 + \gamma h(\varphi \;\; - \varphi_0) \end{aligned}$$

Se consideră şi

$$u_2 = u_1 + h\dot{u}_1 + \tfrac{1}{2}h^2\varphi_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Din acestea, avem:

$$u_1 - u_0 = h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\varphi_0 + \beta h^2(\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$u_2 - u_1 = h\dot{u}_1 + \tfrac{1}{2}h^2\varphi_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\dot{u}_1 - \dot{u}_0 = h\varphi_0 + \gamma h(\varphi \;\; - \varphi_0)$$

Scăzând prima relaţie din a doua, şi înlocuind $\dot{u}_1 - \dot{u}_0$, rezultă

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2[\beta\varphi_2 + (\tfrac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\varphi_1 + (\tfrac{1}{2} + \beta - \gamma)\varphi_0] \tag{a}$$

Analog, cu $\dot{u}_2 - \dot{u}_1 = h\varphi_1 + \gamma h(\varphi_2 - \varphi_1)$, se obţine:

$$\dot{u}_2 - 2\dot{u}_1 + \dot{u}_0 = h[\gamma\varphi_2 + (1 - 2\gamma)\varphi_1 + (\gamma - 1)\varphi_0]. \tag{b}$$

În cazul fără amortizare, ecuaţia este $\ddot{u} = \varphi(u,t)$ şi se poate utiliza numai ecuaţia (a).

Propoziţia 2

Dacă nu există amortizare ($g(\dot{u}) = 0$), metoda Newmark cu $\gamma = \frac{1}{2}$, şi $\beta = 1/12$, are ordinul $p = 4$ ■

Metoda cu $\beta = 1/12$ se mai zice formula Fox-Goodwin.

Pentru a proba concluzia, se consideră condiţiile (6b).

Astfel, punem condiţia ca relaţiile (6b) să fie verificate pentru $q = 0,1,\ldots,5$. Din acestea rezultă $\gamma = \dfrac{1}{2}$ şi $\beta = \dfrac{1}{12}$; relaţia pentru $q = 6$ nu mai este verificată.

Rezultă că ordinul este $p = 4$.

Obsevaţie

Operatorul cu $\gamma = \dfrac{1}{2}$ este:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2[\beta\varphi_2 + (1-2\beta)\varphi_1 + \beta\varphi_0]$$

În particular, pentru $\beta = 1/12$, aceasta devine:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = \frac{h^2}{12}[\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0]$$

(operatorul coincide cu metoda Numerov.)

■

2.2 Un operator de ordinul trei (generalizarea operatorului Newmark)

O familie de noi operatori, care generalizează operatorul Newmark a fost introdusă de autor – v. Chisăliţă A. & Chisăliţă F. (1990, 1998).

Formulele operatorului

Notăm, pentru simplificare, pasul curent şi anterior cu indicii 1 şi 0, respectiv (în loc de *i*+1 şi *i*). Presupunem că funcţia *u* satisface pe intervalul $I = [t_0, t_1]$, $t_1 = t_0 + h$, una din următoarele condiţii:

(1) $\dddot{u}$ e derivabilă în $I-\{t_0\}$;

(2) $\dddot{u}$ e continuă în t_0 şi există $\ddddot{u}$, finită sau nu, în $I-\{t_0\}$.

Atunci, pentru orice întregi pozitivi p, p' şi p'', seria Taylor a funcţiilor u, $\dot{u}$ şi $\ddot{u}$, cu restul în forma Schlömilch-Roche (v. Nicolescu (1958)), este:

$$u(t_1)=u(t_0)+h\dot{u}(t_0)+\tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0)+\beta h^3\dddot{u}(t_0+\theta h) \tag{50a}$$

$$\dot{u}(t_1)=\dot{u}(t_0)+h\ddot{u}(t_0)+\gamma h^2\dddot{u}(t_0+\theta' h) \tag{50b}$$

$$\ddot{u}(t_1)=\ddot{u}(t_0)+\delta h\dddot{u}(t_0+\theta'' h) \tag{50c}$$

în care θ, θ' şi $\theta''\in(0,1)$ şi sunt asociaţi cu p, p' and p'', respectiv, şi cu t_0, iar coeficienţii β, γ şi δ sunt daţi de:

$$\beta=\frac{(1-\theta)^{3-p}}{2p},\quad \gamma=\frac{(1-\theta')^{2-p'}}{p'},\quad \delta=\frac{(1-\theta'')^{1-p''}}{p''} \tag{51}$$

Dacă notăm cu $\bar{u}$ şi $\bar{\dot{u}}$ seriile Taylor trunchiate din (50a, b), adică:

$$\bar{u}(t_1)=u(t_0)+h\dot{u}(t_0)+\tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0)$$

$$\bar{\dot{u}}(t_1)=\dot{u}(t_0)+h\ddot{u}(t_0),$$

ecuaţiile (50) devin:

$$u(t_1)=\bar{u}(t_1)+\beta h^3\dddot{u}(t_0+\theta h) \tag{52a}$$

$$\dot{u}(t_1)=\bar{\dot{u}}(t_1)+\gamma h^2\dddot{u}(t_0+\theta' h) \tag{52b}$$

$$\ddot{u}(t_1)=\ddot{u}(t_0)+\delta h\dddot{u}(t_0+\theta'' h) \tag{52c}$$

Ecuaţiile (52 a-c) reprezintă formulele generale pentru a deduce operatori de integrare directă. Aceasta se va face introducând ipoteze asupra variaţiei $\dddot{u}$ pe intervalul $[t_0,t_1]$.

a) Operatorul Newmark

Să presupunem că

A1 | $\dddot{u}(t)$ = *constant*, pe $I=[t_0,t_1]$.

Atunci, notând

$$\Delta\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0), \tag{53}$$

avem

$$\dddot{u}(t) = \Delta\ddot{u}(t_1)/h. \tag{53'}$$

Formulele operatorului Newmark se obţin din (52), scrise cu ipoteza (53'), şi punând valorile calculate $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$, în locul celor exacte $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$. Pentru compatibilitate cu ipoteza A1, luăm δ = 1 în (52c). Această valoare corespunde la alegerea p'' = 1 în (51). Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{u}_1 \tag{54a}$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{u}_1 \tag{54b}$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \Delta\ddot{u}_1 \tag{54c}$$

în care, funcţiile barate sunt seriile Taylor trunchiate (scrise cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}_0, \qquad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0. \tag{54d}$$

Coeficienţii β and γ sunt definiţi de (51) şi diferite alegeri ale lui p şi p' conduc la diferite metode Newmark. De exemplu, pentru p = 3 şi p' = 2, se obţine metoda cu $\beta = \tfrac{1}{6}$, $\gamma = \tfrac{1}{2}$, fără a mai fi nevoie de estimarea lui θ şi θ'.

Este de notat că pasul h trebuie să fie suficient de mic pentru ca ipoteza A1 să fie satisfăcută. De asemenea, după deducerea precedentă, toate metodele Newmark rezultă din ipoteza A1, echivalentă cu variaţia liniară a acceleraţiei în intervalul I.

b) Un nou operator

Presupunem că

A2 | $\dddot{u}(t)$ variază *liniar* pe intervalul $I = [t_0, t_1]$

Notând

$$\Delta\dddot{u}(t_1) = \dddot{u}(t_1) - \dddot{u}(t_0), \tag{55}$$

ipoteza A2 conduce la

$$\dddot{u}(t_0 + \theta\Delta t) = \dddot{u}(t_0) + \theta\Delta\dddot{u}(t_1) \tag{55'}$$

Formulele operatorului se obţin din (52), cu ipoteza (55'), şi înlocuind valorile exacte cu cele calculate. Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^3 \dddot{u}_0 + \theta\beta h^3 \Delta\dddot{u}_1 \tag{56a}$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h^2 \dddot{u}_0 + \theta'\gamma h^2 \Delta\dddot{u}_1 \tag{56b}$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \delta h \dddot{u}_0 + \theta''\delta h \Delta\dddot{u}_1 \tag{56c}$$

$$\dddot{u}_1 = \dddot{u}_0 + \Delta\dddot{u}_1 \tag{56d}$$

în care funcţiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate (cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}_0, \qquad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0. \tag{56e}$$

Coeficienţii β, γ, δ şi θ, θ', θ'' se vor alege din condiţia ca eroarea formulelor (56 a-d) să fie minimizată.

Formulele pentru un sistem:

$$\mathbf{U}_1 = \overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^3 \dddot{\mathbf{U}}_0 + \theta\beta h^3 \Delta\dddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57a}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_1 = \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h^2 \dddot{\mathbf{U}}_0 + \theta'\gamma h^2 \Delta\dddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57b}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta h \dddot{\mathbf{U}}_0 + \theta''\delta h \Delta\dddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57c}$$

$$\dddot{\mathbf{U}}_1 = \dddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\dddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57d}$$

în care:

$$\overline{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_0 + h\dot{\mathbf{U}}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{U}}_0, \qquad \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \dot{\mathbf{U}}_0 + h\ddot{\mathbf{U}}_0. \tag{57e}$$

Integrarea ecuaţiei (1, 2)

Fie ecuaţia (1),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t)$$

cu condiţiile iniţiale $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_0)$, $\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{U}}(t_0)$. Acestea, înlocuite în ecuaţia scrisă pentru $t = t_0$, conduc la

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{P}(t_0),$$

din care se determină $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$. Considerând ecuaţia (1) *derivată*, şi scrisă pentru $t = t_0$, rezultă

$$\mathbf{M}\dddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{P}}(t_0),$$

din care se determină $\dddot{\mathbf{U}}_0 = \dddot{\mathbf{U}}(t_0)$. S-au notat: **B** şi **C**, jacobienii lui **g** în raport cu **U** şi $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; **A** este jacobianul lui **f**; v. (29b).:

$$\mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial \dot{u}_j]_{i,j=1,n}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{U}) = [\partial f_i / \partial u_j]_{i,j=1,n}. \tag{58}$$

Pentru un sistem liniar (2), avem **B** = **C**, **A** = **K** (matrici constante).

Considerăm ecuaţia (1) scrisă pentru momentul $t_1 = t_0 + h$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_1) = \mathbf{P}(t_1) \tag{59}$$

şi înlocuim $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1$ din (57). Notând, pentru claritate, $\mathbf{W} = \Delta\dddot{\mathbf{U}}_1$, se obţine ecuaţia neliniară:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{W}) &= \mathbf{M}\theta''\delta h\mathbf{W} + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}) \\ &+ \mathbf{M}\cdot\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 - \mathbf{P}(t_1)\end{aligned} \tag{61b}$$

în care s-a pus:

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = \overline{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^3\dddot{\mathbf{U}}_0 \tag{61a}$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma(\Delta t)^2\dddot{\mathbf{U}}_0 \tag{61b}$$

$$\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta(\Delta t)\dddot{\mathbf{U}}_0 \tag{61c}$$

Ecuaţia (60) se rezolvă cu metoda Newton, iteraţia fiind definită de

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}^{(n+1)} = \mathbf{W}^{(n)} + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \\ &\mathbf{J}(\mathbf{W}^{(n)})\delta_{n+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{W}^{(n)})\end{aligned} \tag{62}$$

în care $\mathbf{J}(\mathbf{W}) = [\partial F_i / \partial W_j]$ este jacobianul lui **F**, dat de:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{W}) &= \mathbf{M}\theta''\delta h + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta\beta h^3 \\ &+ \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta'\gamma h^2 + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W})\theta\beta h^3\end{aligned} \tag{63}$$

Iteraţia se încheie prin testele:

$\| \boldsymbol{\delta}_n \| \le \varepsilon$ şi *Număr de iteraţii* $\le$ *LNIT* (64)

unde ε and *LNIT* sunt alese dinainte.

Cu $\mathbf{W} = \Delta \dddot{\mathbf{U}}_1$ găsită ca mai sus, din (57 a-d) se calculează valorile $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1, \dddot{\mathbf{U}}_1$, care sunt luate ca valori iniţiale pentru pasul următor.

În particular, pentru un sistem liniar (2) ecuaţia (60) devine liniară în **W**, şi anume:

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{W} = \hat{\mathbf{P}},$$

unde

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\theta''\delta\Delta t + \mathbf{C}\theta'(\Delta t)^2 + \mathbf{K}\theta\beta(\Delta t)^3,$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M}\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{C}\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}_1).$$

Eroarea de trunchiere locală şi alegerea coeficienţilor

Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (57) când valorile calculate se înlocuiesc cu cele exacte.

Pentru eroarea să fie minimă, rezultă coeficienţii:

$$\beta = \tfrac{1}{6}, \theta = \tfrac{1}{4};\ \gamma = \tfrac{1}{2}, \theta' = \tfrac{1}{3};\ \delta = 1, \theta'' = \tfrac{1}{2}$$

Cu aceştia , avem:

- Eroarea în u:

$$T_1 = h^5 C_1, \qquad |C_1| < \tfrac{1}{24} M_5 \tag{66}$$

unde M_5 marginea lui $u^{(5)}$ pe intervalul $[t_0, t_1]$.

- Eroarea în $\dot{u}$:

$$T_1' = h^4 C_1', \qquad |C_1'| < \tfrac{1}{6} M_5 \tag{67}$$

- Eroarea în $\ddot{u}$:

$$T_1'' = h^3 C_1'', \qquad |C_1'| < \tfrac{1}{2} M_5 \tag{68}$$

Ordin

Revenind la pasul general $i \geq 1$, rezultatele anterioare (66-68) se scriu:

$$T_i = h^5 C_i, \quad |C_i| < \tfrac{1}{24} M_5$$
$$T_i' = h^4 C_i', \quad |C_i'| < \tfrac{1}{6} M_5 \tag{69}$$
$$T_i'' = h^3 C_i'', \quad |C_i''| < \tfrac{1}{2} M_5$$

unde $|u^{(5)}(t)| < M_5,\ t \in [t_0, TT]$.

Cum $T_i = O(h^5)$, iar $T_i' = O(h^4)$, rezultă următoarea propoziţie:

Propoziţia 1

Operatorul cu coeficienţii $\beta = \tfrac{1}{6}, \theta = \tfrac{1}{4}$; $\gamma = \tfrac{1}{2}, \theta' = \tfrac{1}{3}$; $\delta = 1, \theta'' = \tfrac{1}{2}$, are ordinul $p = 3$ ■

Propoziţia 2

Dacă nu există amortizare, operatorul are ordinul $p = 4$ ■

Aceasta se probează punând operatorul sub forma multi-pas, şi anume se obţine:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2 \frac{1}{12}[\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0].$$

Formula coincide cu cea a operatorului Newmark, pentru $\gamma = \tfrac{1}{2}$ şi $\beta = \tfrac{1}{12}$.

■

Stabilitatea operatorului (stabilitatea liniară)

Tratăm stabilitatea pentru sistemul liniar (2) şi presupunem că aceasta se decuplează în forma (5). Aceasta revine la a discuta stabilitatea pentru o singură ecuaţie de forma

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = p(t) \tag{80}$$

Punem:

$$x = \omega h = 2\pi(h/T). \tag{85}$$

$T = 2\pi/\omega$ notează perioada răspunsului fără amortizare.

$$a = \beta' x^2 + 2\zeta\gamma' x + \delta'$$

$$\beta' = \beta\theta, \quad \gamma' = \gamma\theta', \quad \delta' = \delta\theta''.$$

Forma matriceală a operatorului

Notăm cu

$$\mathbf{X}(t) = \left[u(t) \quad \dot{u}(t) \quad \ddot{u}(t) \quad \dddot{u}(t)\right]^T \tag{81}$$

Formulele operatorului se pun sub forma:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{S}\mathbf{X}_0 + \mathbf{R}p_1 \tag{86}$$

Unde:

$$\mathbf{R}_0 = \left[\beta' h^3 \quad \gamma' h^2 \quad \delta' h \quad 1\right]^T, \text{ şi } \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 /(ah)\,;\; p_1 = p(t_1).$$

S este matricea operatorului.

Calculând **S** şi aplicându-i transformarea de similaritate de finită de

$$\mathbf{S}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{D}, \qquad \mathbf{D} = diag[h^{4-i}]_{i=1,4} \tag{88}$$

obţinem următoarea structură a matricii **S**':

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} 1-\beta' c_1 & 1-\beta' c_2 & \frac{1}{2}-\beta' c_3 & \beta-\beta' c_4 \\ -\gamma' c_1 & 1-\gamma' c_2 & 1-\gamma' c_3 & \gamma-\gamma' c_4 \\ -\delta' c_1 & \delta' c_2 & 1-\delta' c_3 & \delta-\delta' c_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 1-c_4 \end{bmatrix} \tag{89}$$

Coeficienţii c_i sunt definiţi de:

$$c_1 = x^2 / a\,,\; c_2 = (x^2 + 2\zeta x)/a\,,\; c_3 = (x^2 + 2\zeta x + 1)/a\,,$$

$$c_4 = (\beta x^2 + 2\zeta x + \delta)/a \tag{89a}$$

Criteriul de stabilitate

Considerăm formula de recurenţă (86) scrisă pentru momentul general $t = t_{i+1}$:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{X}_i + \mathbf{R}p_{i+1}, \quad i \geq 0$$

Aplicată sucesiv pentru i = 0, 1, …, n-1, se obţine:

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{X}_0 + (p_1\mathbf{S}^{n-1} + p_2\mathbf{S}^{n-2} + \ldots + p_n\mathbf{I})\mathbf{R} \tag{90}$$

în care $p_j = p(t_j)$, iar **I** este matricea unitate.

Să presupunem că, condiţia iniţială $\mathbf{X}_0$ este afectată de o eroare **d**, astfel că în loc de $\mathbf{X}_0$ avem:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{d}$$

Soluţia calculată cu condiţia iniţială $\mathbf{Y}_0$ va fi dată de (90), fie aceasta

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{Y}_0 + (p_1\mathbf{S}^{n-1} + p_2\mathbf{S}^{n-2} + \ldots + p_n\mathbf{I})\mathbf{R} \qquad (91)$$

Scăzând (91) din (90) avem eroarea

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{d}$$

Definiţie

Operatorul se zice *stabil* dacă eroarea $\mathbf{e}_n$ rămâne mărginită pentru $\forall n$ ■

Dacă **S** are numai rădăcini simple, criteriul de stabilitate este:

$$\rho(\mathbf{S}) \le 1 \qquad (95)$$

unde $\rho(\mathbf{S}) = \max_i |\lambda_i|$ este raza spectrală a lui **S**.

Dacă în (95) avem $\rho(\mathbf{S}) < 1$, atunci rezultă $n \to \infty \Rightarrow \mathbf{e}_n \to \mathbf{0}$.

■

Rezultate:

a) Sistem fără amortizare (ζ = 0)

Se obţine:

$$x^2 < 6, \quad \text{sau}$$
$$\frac{h}{T} < \frac{\sqrt{6}}{2\pi} = 0.389848 \qquad (103)$$

Aceasta este limita de stabilitate pentru raportul *h/T* (lungime pas/perioadă).

b) Sistem cu amortizare ($\zeta \neq$ 0)**. Operatorul cu mediere.**

Utilizând criteriul Routh-Hurwitz (v. Hairer & al. (1987)), se poate arătă că pentru $\zeta \neq$ 0 operatorul este *instabil* pentru orice pas *h*. Procesul descris mai jos, numit "medierea asupra lui $\ddot{u}$", va asigura stabilitatea operatorului pentru sisteme liniare cu amortizare. Presupunem $p(t)$ derivabil pe intervalul $[t_0, t_1]$. Atunci, derivând ecuaţia de mişcare (80) avem:

$$\dddot{u} + 2\zeta\omega\ddot{u} + \omega^2\dot{u} = \dot{p}(t) \tag{104}$$

Susbtituind în (104), scrisă pentru $t = t_1$, valorile $u_1, \dot{u}_1$ şi $\ddot{u}_1$ calculate din (52a-c), se obţine o nouă valoare a lui $\dddot{u}(t_1)$, fie aceasta:

$$\dddot{u}_1^{(1)} = -\omega^2\dot{u}_1 - 2\zeta\omega\ddot{u}_1 + \dot{p}(t_1) \tag{105}$$

Dacă valorile $u_1, \dot{u}_1, \ddot{u}_1$ ar fi exacte, atunci $\dddot{u}_1$ dat de (56d) ar fi egal cu $\dddot{u}_1^{(1)}$ dat de (105). Media cu ponderea ν, $0 < \nu < 1$, a acestor două valori, se va lua ca nouă aproximaţie a lui $\dddot{u}(t_1)$, adică:

$$\dddot{u}_1^{(m)} = \nu\dddot{u}_1 + (1-\nu)\dddot{u}_1^{(1)} \tag{106}$$

În Figura 1 de mai jos, se dă raza spectrală $\rho^{(m)}$ a matricii $\mathbf{S}^{(m)}$ pentru $\nu = 0.5$, pentru rapoarte de amortizare ζ în plaja 0.0 … 0.9, reprezentată în funcţie de raportul h/T (unde T este perioada sistemului fără amortizare) . Valoarea h/T pentru care $\rho^{(m)} = 1$ este limita de stabilitate pentru valoarea ζ respectivă.

În Figura 2 se dă limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru $\nu = 0.5$ şi $\nu = 0.9$, reprezentată în funcţie de ζ.

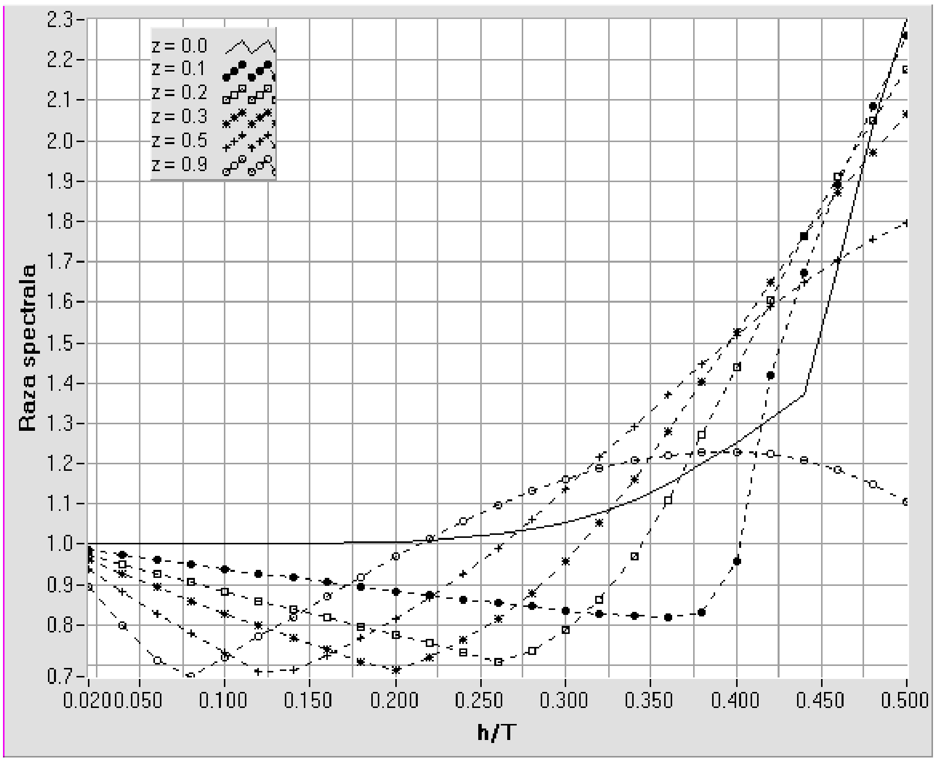

Fig. 1 – Raza spectrală pentru ν = 0.5, pentru diferite rapoarte de amortizare ζ = z

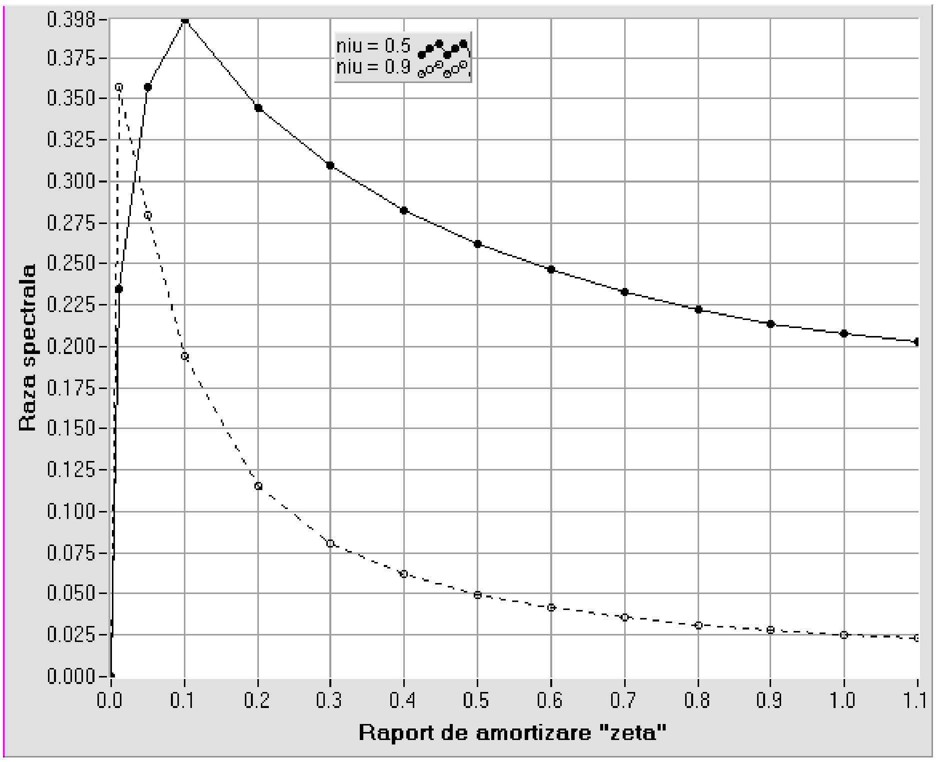

Fig. 2 – Limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru ν = 0.5 şi ν = 0.9

Din Figura 2 se poate observa că, pentru o valoare dată ζ, limita de stabiliate descreşte pe măsură ce ν (ν < 1) se apropie de 1. Teste numerice (pentru sisteme liniare cu amortizare) au arătat că, valori ν apropiate de 1 oferă o precizie mai mare, dar mărimea pasului este limitată de raza spectrală. O valoare care convine este ν = 0.5, adică în (106) se ia *media aritmetică* a celor două valori.

Medierea pentru $\zeta = 0$:

Utilizând polinomul caracteristic al lui $\mathbf{S}'^{(m)}$ şi criteriul Routh-Hurwitz, se poate arăta analitic, că operatorul cu mediere este instabil pentru orice ν şi orice *h*. În particular, pentru ν = 0.5, aceasta se observă pe graficul din Figura 1, pentru z = 0: avem $\rho \geq 1$. În consecinţă, medierea asupra lui $\ddot{u}$ se va utiliza *pentru şi numai pentru* sisteme cu amortizare.

Observaţie

Pentru un sistem (2), medierea asupra lui $\ddot{\mathbf{U}}$ se obţine pe aceeaşi cale ca mai sus. Derivând ecuaţia (2) se obţine $\mathbf{M}\dddot{\mathbf{U}} + \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}})\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{A}(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{P}}(t)$, şi înlocuind $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1$ şi $\ddot{\mathbf{U}}_1$ din (57 a-c) avem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \dot{\mathbf{P}}(t_1) - \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}_1)\ddot{\mathbf{U}}_1 - \mathbf{A}(\mathbf{U}_1)\dot{\mathbf{U}}_1$$

care se rezolvă în raport $\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)}$. Medierea este dată de:

$$\ddot{\mathbf{U}}_1^{(m)} = \nu\ddot{\mathbf{U}}_1 + (1-\nu)\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)}$$

unde $\ddot{\mathbf{U}}_1$ este dat de (57d) ■

Exemplu de test – problema celor două corpuri

Considerăm din nou problema celor două corpuri – v. 3.3.9, în cazul *e* = 0.9, acesta fiind testul cel mai sever. Integrăm cu noul operator, cu coeficienţii: $\beta = \frac{1}{6}, \beta\theta = \frac{1}{24}$; $\gamma = \frac{1}{2}, \theta'\gamma = \frac{1}{6}$; $\delta = 1, \theta''\delta = \frac{1}{2}$ – formulele (56) şi luând: *eps* = 1E-6, *lnit* = 3. Codul utilizat este cel dat în ANA. Comparaţia rezultatelelor cu cele obţinute în 3.3.9 prin metoda RK4 (pas constant) se dă în tabelul următor.

e = 0.9, Erori absolute extreme la *t* = 18.849 (18.84 – pentru *h* = 0.01; 0.005).

Pasul h	RK4		Noul Operator	
	Eroarea absolută		Eroarea absolută	
	Maximă ($\dot{x}$)	Minimă (x)	Maximă ($\dot{x}$)	Minimă (x)
0.01[†]	3.52 D0	3.54 D-1	1.58 D0	5.93 D-2
0.005	7.12 D-1	4.26 D-3	1.42 D-1	1.68 D-3
0.001	6.02 D-4	3.33 D-7	2.63 D-3	1.47 D-7
0.0005	3.28 D-5	1.82 D-8	1.64 D-5	9.13 D-9
0.0001	4.64 D-8	1.19 D-11	2.72 D-8	6.98 D-12

[†] Eroarea maximă are loc în $\dot{y}$.

Observaţii

a) După cum se observă din tabel, erorile sunt cca. 1/2 din cele ale metodei RK4.

b) Convergenţa iteraţiei în metoda Newton (subrutina `NewOp`) este rapidă: de exemplu, pentru h = 0.001, după 2 iteraţii valorile normei corecţiei (`delta_w`) sunt de ordinul $10^{-13} \ldots 10^{-14}$, sau chiar 0.0 (cu excepţia primelor momente când au ordinul $10^{-8} \ldots 10^{-12}$) ■