Matricea “companion”

Metoda QR se poate aplica pentru calcularea rădăcinilor unui polinom – fiind una dintre cele mai precise metode pentru acest scop.

Fie polinomul de gradul n: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Vom presupune că $a_n = 1$, astfel că polinomul este

$$\underline{p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=1}^{n} (x - z_i)},$$

unde z_i sunt rădăcinile polinomului.

Considerăm matricea:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & 0 & & & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Matricea **C** se zice *matricea companion* a polinomului $p(x)$.

Propoziție

a) Valori proprii ale matricii **C** sunt rădăcinile polinomului $p(x)$;

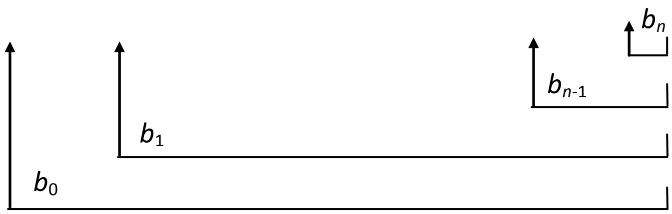
b) Vectorul propriu *la stânga* asociat cu valoarea λ, este $\mathbf{x}^T = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$ ■

(a) Polinomul caracteristic al lui **C** este $p_C(\lambda) = \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I})$:

$$p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Reamintim calculul valorii polinomului în forma imbricată:

$$p(x) = a_0 + x \cdot (a_1 + x \cdot (a_2 + \ \ldots \ + x \cdot (a_{n-2} + x \cdot (a_{n-1} + x \cdot a_n)) \ldots)$$



Astfel, avem coeficienții:

$b_n = a_n$ (acum: $b_n = 1$)

$b_{n-1} = a_{n-1} + x \cdot b_n$ (acum: $b_{n-1} = a_{n-1} + x$)

. . . .

$b_k = a_k + x \cdot b_{k+1}$

. . . .

$b_0 = a_0 + x \cdot b_1$

Avem:

$b_0 = p(x)$.

Pentru determinantul $p_C(\lambda)$:

Procedăm ca la reducerea Gauss, însă facem zero-uri pe diagonală. Avem:

$(p_C)_{n,n} = -a_{n-1} - \lambda = -b_{n-1}$

Înmulțim ultima linie cu λ și adunăm la precedenta. Rezultă elementul $(n-1, n)$:

$(p_C)_{n-1,n} = -a_{n-2} + \lambda(-b_{n-1}) = -b_{n-2}$

Astfel, elementul (i, n) va fi

$(p_C)_{i,n} = -a_{i-1} + \lambda(-b)_i = -b_{i-1}$

În fine, elementul $(1, n)$ va fi:

$$(p_C)_{1,n} = -a_0 + \lambda(-b_1) = -b_0 = -p(\lambda)$$

Astfel avem:

$$p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -p(\lambda) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & -b_{i-1} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{vmatrix} = \pm p(\lambda)$$

(Ultima egalitate se obține desvoltând după linia întîi. Semnul este dat de $(-1)^n$)

<u>Observație</u> Avem și:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{C})$$

Exercițiu!

■

<u>Exemplu n = 3</u>

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}; \qquad p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$b_2 = a_2 + \lambda$$
$$b_1 = a_1 + \lambda b_2$$
$$b_0 = a_0 + \lambda b_1$$

$$p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & -a_1 \\ 0 & 1 & -b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \oplus \\ \times\lambda \end{matrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & -b_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \oplus \\ \times\lambda \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & -b_2 \end{vmatrix} = -p(\lambda)$$

Analog, pentru n = 4:

$$p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -b_3 \end{vmatrix} = p(\lambda)\,.$$

(b) Calculăm:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & 0 & & & -a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} & y \end{bmatrix}$$

unde:

$$y = -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1} = \lambda^n$$

Ultima egalitate provine din:

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

Astfel, rezultă că avem $\mathbf{x}^T \mathbf{C} = \lambda \mathbf{x}^T$, adică (b) ■

Astfel, dacă z_i sunt rădăcinile (zero-urile) polinomului $p(x)$, iar λ_i - valorile proprii ale lui **C**, rezultă că avem

$$z_i = \lambda_i, \quad \overline{i = 1, n}$$

■