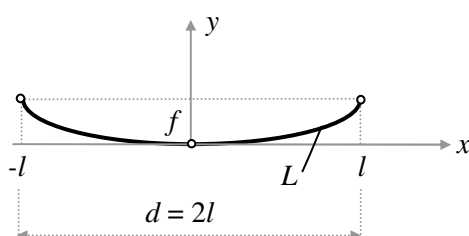


Capitolul 2

CALCULUL APROXIMATIV AL FERMELOR – CABLU CU MONTANȚI VERTICALI – la încărcare uniform distribuită

1 CABLUL PARABOLIC SIMETRIC

1.1 Lungimea



Ecuția parabolei simetrice, cu săgeata f și deschiderea $d = 2l$, este:

$$y = \frac{f}{l^2} x^2; \quad y' = \frac{2f}{l^2} x$$

Conform dezvoltării $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$, rezultă:

$$\frac{1}{2}L = \int_0^l \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^l (1 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{8}y'^4 + \frac{1}{16}y'^6 - \frac{5}{128}y'^8 + \frac{7}{256}y'^{10} \dots) dx$$

Înlocuind y' , rezultă:

$$L = 2l \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{f}{l} \right)^4 + \frac{4}{7} \left(\frac{f}{l} \right)^6 - \frac{10}{9} \left(\frac{f}{l} \right)^8 + \frac{28}{11} \left(\frac{f}{l} \right)^{10} \dots \right]$$

Neglijând termenii în $(\frac{f}{l})$ începând cu un anumit ordin, se obțin expresii aproximative ale lungimii cablului. În aceste expresii, eroarea absolută este mai mica decât primul termen neglijat. Astfel:

$$L_1 = 2l \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right] \tag{4-1}$$

$$L_2 = 2l \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{f}{l} \right)^4 \right], \quad (4-2)$$

$$L_3 = 2l \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{f}{l} \right)^4 + \frac{4}{7} \left(\frac{f}{l} \right)^6 \right] \quad (4-3)$$

De exemplu, pentru $f/l = 1/5$ ($f/d = 1/10$), erorile relative $|L - L_i|/L$ sunt mai mici decât: 6E-4; 3.65E-5; 2.84E-6, respectiv pentru expresiile (4-1), (4-2) și (4-3).

1.2 Variația lungimii la variația săgeții

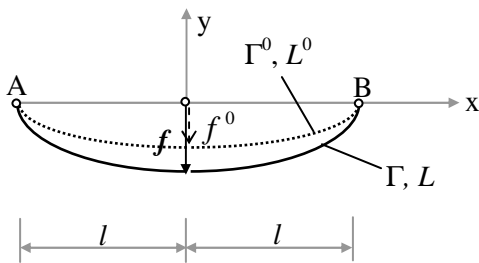
Fie configurația în care cablul are săgeata f^0 . Diferențiind (4), pentru variația $df = f - f^0$ a săgeții, obținem:

$$dL_1 = 2 \frac{4}{3} \frac{f^0}{l} df \quad (5-1)$$

$$dL_2 = 2 \left[\frac{4}{3} \frac{f^0}{l} - \frac{8}{5} \left(\frac{f^0}{l} \right)^3 \right] df \quad (5-2)$$

$$dL_3 = 2 \left[\frac{4}{3} \frac{f^0}{l} - \frac{8}{5} \left(\frac{f^0}{l} \right)^3 + \frac{24}{7} \left(\frac{f^0}{l} \right)^5 \right] df \quad (5-3)$$

1.3 Alungirea



$$L^0 = \int_{\Gamma^0} ds^0; \quad L = \int_{\Gamma} ds = \int_{\Gamma^0} \left(\frac{ds}{ds^0} \right) ds^0$$

$$L - L^0 = \int_{\Gamma^0} \left(\frac{ds}{ds^0} - 1 \right) ds^0 = \int_{\Gamma^0} \left(\frac{ds - ds^0}{ds^0} \right) ds^0$$

Fie două configurații apropiate, definite de

$$f = f^0 + \Delta f; \quad L = L^0 + \Delta L; \quad T = T^0 + \Delta T \quad (\text{unde } \Delta = d).$$

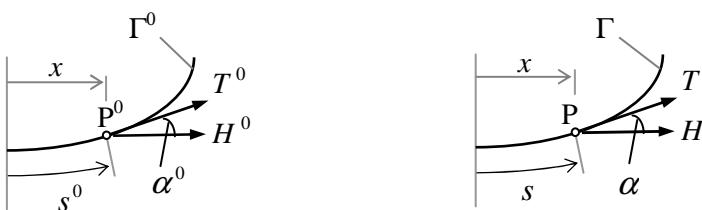
Avem:

$$\frac{ds - ds^0}{ds^0} = \frac{\Delta T}{EA},$$

rezultă:

$$\Delta L = \int_{\Gamma^0} \frac{\Delta T}{EA} ds^0 = \int_{AB} \left(\frac{\Delta T}{EA} \frac{ds^0}{dx} \right) dx$$

$$\text{unde } \frac{ds^0}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha^0}.$$



Cu

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}$$

și $\Delta T = dT$, rezultă:

$$\Delta T = \left. \frac{\partial T}{\partial H} \right|_0 \Delta H + \left. \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right|_0 \Delta \alpha = \frac{1}{\cos \alpha^0} \Delta H + H^0 \frac{\sin \alpha^0}{\cos^2 \alpha^0} \Delta \alpha,$$

unde: mărimile notate cu indicele superior 0 sunt calculate în s^0 ; $\Delta \alpha = \alpha - \alpha^0$. Rezultă:

$$\Delta T \frac{ds^0}{dx} = \Delta T \frac{1}{\cos \alpha^0} = \frac{1}{\cos^2 \alpha^0} \Delta H + H^0 \frac{\sin \alpha^0}{\cos^3 \alpha^0} \Delta \alpha$$

Punem:

$$\Delta T_1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha^0} \Delta H = \Delta H (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha^0) = \Delta H (1 + y_0'^2(x))$$

$$\Delta T_2 = H^0 \frac{\sin \alpha^0}{\cos^3 \alpha^0} \Delta \alpha = H^0 \frac{1}{2} d \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha^0} \right)$$

Avem:

$$\int_{AB} \frac{\Delta T_1}{EA} dx = \frac{\Delta H}{EA} \int_{-l}^l \left(1 + \frac{4f^{02}}{l^4} x^2\right) dx = \frac{\Delta H}{EA} \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right)^2\right]$$

$$\int_{AB} \frac{\Delta T_2}{EA} dx = \frac{H^0}{EA} \int_{-l}^l d\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha^0}\right) dx = 0$$

Cu acestea, rezultă expresia alungirii între două configurații apropiate:

$$\Delta L = 2l \frac{1}{EA} \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right)^2\right] \Delta H$$

unde $\Delta H = H - H^0$. Înlocuind acum Δ cu d , deducem:

$$dL = 2l \frac{1}{EA} \left[1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right)^2\right] dH \quad (6)$$

1.4 Variația lui H la variația săgeții

Egalând expresiile lui dL din (5) și (6), rezultă:

$$\underline{dH = K_H^0 df} \quad (7)$$

unde

$$K_H^0 = \frac{dL}{df} = \frac{EA}{l} \frac{\frac{1}{2}(dL/df)}{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right)^2}$$

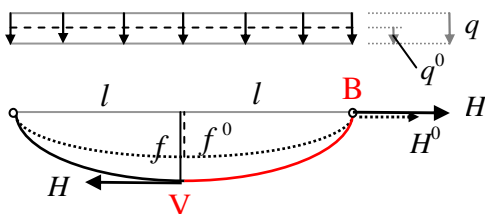
Astfel, din (5-1 ... 5-3) se obțin:

$$K_{H(1)}^0 = \frac{EA}{l} \cdot \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right)}{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right)^2} \quad (8-1)$$

$$K_{H(2)}^0 = \frac{EA}{l} \cdot \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right) - \frac{8}{5} \left(\frac{f^0}{l}\right)^3}{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l}\right)^2} \quad (8-2)$$

$$K_{H(3)}^0 = \frac{EA}{l} \cdot \frac{\frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l} \right) - \frac{8}{5} \left(\frac{f^0}{l} \right)^3 + \frac{24}{7} \left(\frac{f^0}{l} \right)^5}{1 + \frac{4}{3} \left(\frac{f^0}{l} \right)^2} \quad (8-3)$$

1.5 Variația încărcării 'q'



Pentru semi-parabola V-B (V = vârful parabolei), ecuația de moment față de punctul B dă

$$Hf = \frac{ql^2}{2}$$

Diferențiind, se obține:

$$H^0 df + f^0 dH = \frac{l^2}{2} dq$$

Rezultă

$$dq = \frac{2}{l^2} (H^0 df + f^0 dH),$$

sau

$$dq = \frac{q^0}{f^0} df + \frac{2f^0}{l^2} dH \quad (9)$$

1.6 Variația săgeții la variația încărcării 'q'. Rigiditatea tangentă.

Înlocuind (7) în (9) rezultă

$$dq = \left(\frac{q^0}{f^0} + \frac{2f^0}{l^2} K_H^0 \right) df \quad (10)$$

Rigiditatea tangentă

Punem

$$\underline{dq = K^0 df} \quad (11)$$

unde $K^0 = K(f^0)$ este rigiditatea tangentă (săgeată – încărcare).

Sau

$$df = \frac{dq}{K^0},$$

în care $1/K^0$ este *panta* curbei $f = f(q)$, în punctul (q^0, f^0) .

Cu expresia (8-1) ale lui K_H^0 rezultă

$$K_{(1)}^0 = \frac{q^0}{f^0} + \frac{2EA}{l^2} \cdot \frac{\frac{4}{3}(f^0/l)^2}{1 + \frac{4}{3}(f^0/l)^2} \quad (12-1)$$

Sau

$$K_{(1)}^0 = \frac{2}{l^2} \left[H^0 + EA \cdot \frac{\frac{4}{3}(f^0/l)^2}{1 + \frac{4}{3}(f^0/l)^2} \right] \quad (12-1')$$

Analog, din (8-2), (8-3) se obțin:

$$K_{(2)}^0 = \frac{q^0}{f^0} + \frac{2EA}{l^2} \cdot \frac{\frac{4}{3}(f^0/l)^2 - \frac{8}{5}(f^0/l)^4}{1 + \frac{4}{3}(f^0/l)^2} \quad (12-2)$$

$$K_{(3)}^0 = \frac{q^0}{f^0} + \frac{2EA}{l^2} \cdot \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{f^0}{l}\right)^2 - \frac{8}{5}\left(\frac{f^0}{l}\right)^4 + \frac{24}{7}\left(\frac{f^0}{l}\right)^6}{1 + \frac{4}{3}\left(\frac{f^0}{l}\right)^2} \quad (12-3)$$

1.7 Ecuația săgeții la variația finită a încărcării

Reluăm (7), $dH = K_H^0 df$, în care $K_H^0 = K_H(f^0)$, și considerăm acum o configurație curentă

în care săgeata este f , punând $K_H = K_H(f)$.

Cu aceasta, avem:

$$dH = K_H(f)df \quad (7')$$

Introducem, pentru conveniență, variabila adimensională

$$\underline{x = \frac{f}{l}} \quad (13)$$

și scriem $K_H(x)$ în loc de $K_H(f)$. De exemplu, pentru (8-1) avem:

$$K_{H(1)} = \frac{EA}{l} \cdot \frac{\frac{4}{3}x}{1 + \frac{4}{3}x^2}$$

Mai punem, pentru simplificare,

$$\underline{K_H(x) = \frac{EA}{l} k(x)} \quad (14)$$

unde $k(x)$ notează factorul lui $\frac{EA}{l}$ în expresia lui $K_H(x)$. Pentru exemplul de mai sus, avem:

$$k(x) = \frac{\frac{4}{3}x}{1 + \frac{4}{3}x^2}$$

Avem $df = ldx$, și (7') devine:

$$dH = EAk(x)dx$$

Fie acum

$$d\varphi_1(x) = k(x)dx, \quad \varphi_1(x) = \int k(x)dx, \quad (15)$$

rezultă

$$\underline{H - EA\varphi_1(x) = C' \quad (constant)}$$

Sau, înlocuind din

$$H = \frac{ql^2}{2f} = \frac{ql}{2x},$$

rezultă ecuația săgeții

$$\frac{ql}{2x} - EA\varphi_1(x) = C'$$

Împărțind cu EA (și înmulțind cu 2), ecuația devine

$$\frac{ql/(EA)}{x} - 2\varphi_1(x) = C'$$

În fine, notând cantitatea adimensională

$$B = \frac{ql}{EA}$$

și punând

$$\underline{\varphi(x) = 2\varphi_1(x) = 2 \int k(x) dx} \quad (15')$$

rezultă ecuația săgeții în forma:

$$\boxed{\frac{B}{x} - \varphi(x) = C} \quad (16)$$

Constanta C se determină cu valorile din configurația inițială, anume

$$C = \frac{B^0}{x^0} - \varphi(x^0); \quad B^0 = \frac{q^0 l}{EA}. \quad (17)$$

Ecuația (16) se rezolvă prin metoda Newton, punând-o sub forma

$$\boxed{F(x) = 0},$$

unde

$$\underline{F(x) = \frac{B}{x} - \varphi(x) - C} \quad (18)$$

Pentru metoda Newton, derivata lui F va fi:

$$F'(x) = -\frac{B}{x^2} - \varphi'(x)$$

Sau,

$$\underline{F'(x) = -\frac{B}{x^2} - 2k(x)} \quad (19)$$

Observație

Ecuații echivalente se obțin plecând de la rigiditatea tangentă – formulele (12-1 ... 12-3).

Ecuația săgeții – 1

Lucrăm cu expresia (8-1). Avem:

$$k(x) = \frac{4x}{4x^2 + 3}; \quad \varphi(x) = \ln(4x^2 + 3) \quad (20-1)$$

Ecuația săgeții este $F(x) = 0$ unde $F(x)$ este dat de (18), iar conform (19):

$$F'(x) = -\frac{B}{x^2} - \frac{8x}{4x^2 + 3} \quad (20-2)$$

Ecuția săgeții – 2

Lucrând cu (8-2), avem:

$$k(x) = \frac{-1.6x^3 + 4x}{4x^2 + 3}, \quad \varphi(x) = -1.2x^2 + 1.9 \ln(4x^2 + 3) \quad (21-1)$$

$$F'(x) = -\frac{B}{x^2} - \frac{-3.2x^3 + 8x}{4x^2 + 3} \quad (21-2)$$

Ecuția săgeții – 3

În fine, din (8-3) rezultă:

$$k(x) = \frac{1}{35} \frac{360x^5 - 168x^3 + 140x}{4x^2 + 3}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{35} \left(45x^4 - \frac{219}{2}x^2 + \frac{937}{8} \ln(4x^2 + 3) \right) \quad (23-1)$$

$$F'(x) = -\frac{B}{x^2} - \frac{1}{35} \frac{720x^5 - 336x^3 + 280x}{4x^2 + 3} \quad (23-2)$$

1.8 Exemplu

Se consideră cablul cu următoarele caracteristici:

$2l = 140$ m; $f_0 = 12$ m; $A_0 = 107.795$ cm²; $E = 16000$ kN/cm²; $\sigma_{lim} = 106$ kN/cm²; $q_0 = 9.6$ kN/m.

Cablul este analizat pentru o încărcare $q = 10 \dots 50$ kN/m, cu pasul 5 kN/m, prin:

- Calcul liniar;
- Neliniar, cu ecuațiile săgeții 1, 2, și 3;
- Neliniar, cu programul NELSAS: cablul este împărțit în 20 elemente.

Încărcarea s-a limitat la de 50 kN/m, întrucât aceasta produce o tensiune maximă de 90.59 kN/cm² $\approx 85\%$ din tensiunea limită.

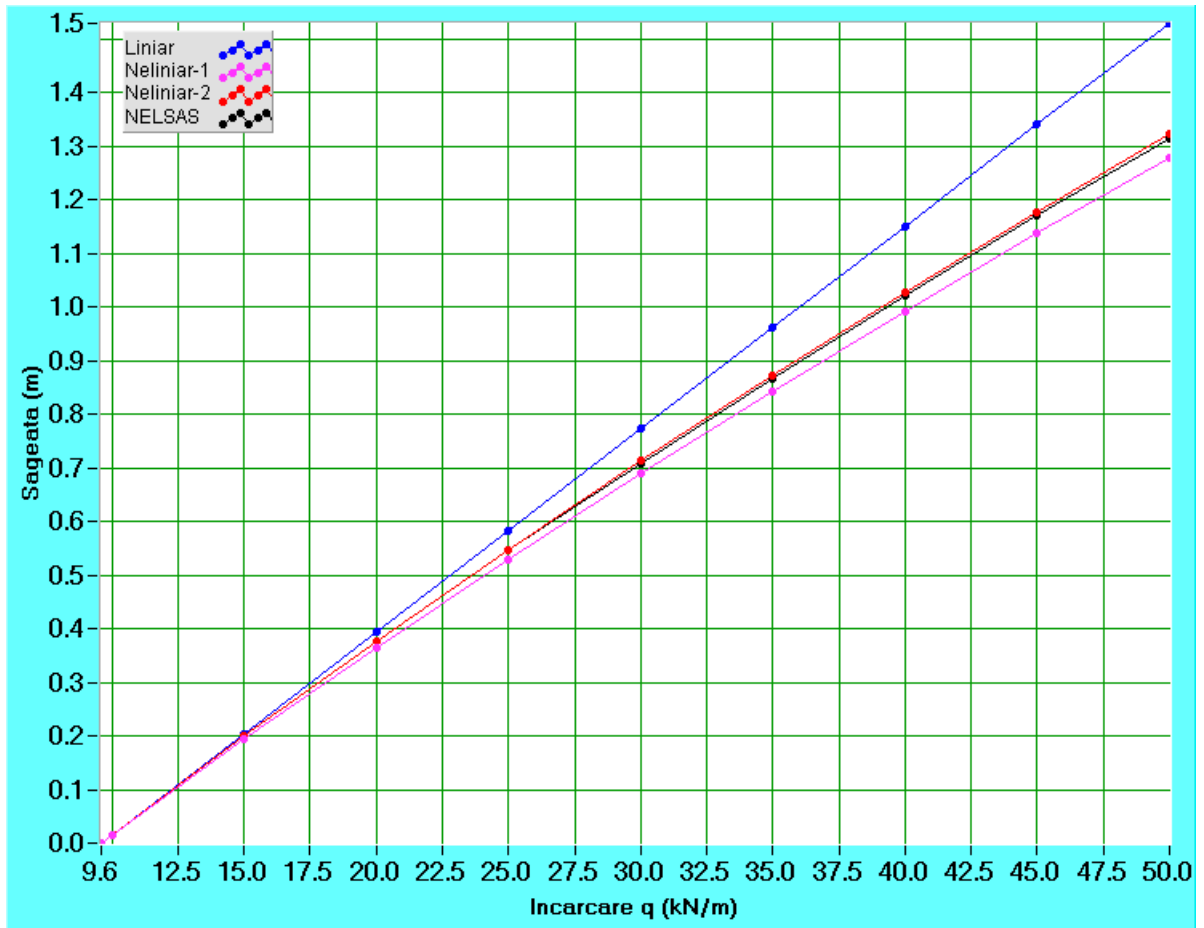
Rezultatele sunt prezentate în tabelul și graficul de mai jos. Valorile “exacte” se consideră cele obținute prin programul NELSAS.

Incarcare	Liniar	Ecuatie-1	Ecuatie-2	Ecuatie-3	NELSAS
9.6	0.	0.	0.	0.	0.
10.0	1.5150E-2	1.4603E-2	1.5118E-2	1.5097E-02	1.5063E-2
15.0	0.20448	0.19305	0.19986	0.19942	0.19904
20.0	0.39382	0.36448	0.37729	0.37644	0.37561

25.0	0.58316	0.52959	0.54815	0.54670	0.54555
30.0	0.77250	0.68897	0.71306	0.71140	0.70947
35.0	0.96183	0.84311	0.87256	0.87049	0.86793
40.0	1.15117	0.99246	1.0271	1.0246	1.0214
45.0	1.34051	1.1374	1.1771	1.1742	1.1702
50.0	1.52985	1.2783	1.3228	1.3196	1.3148

Se observă următoarele:

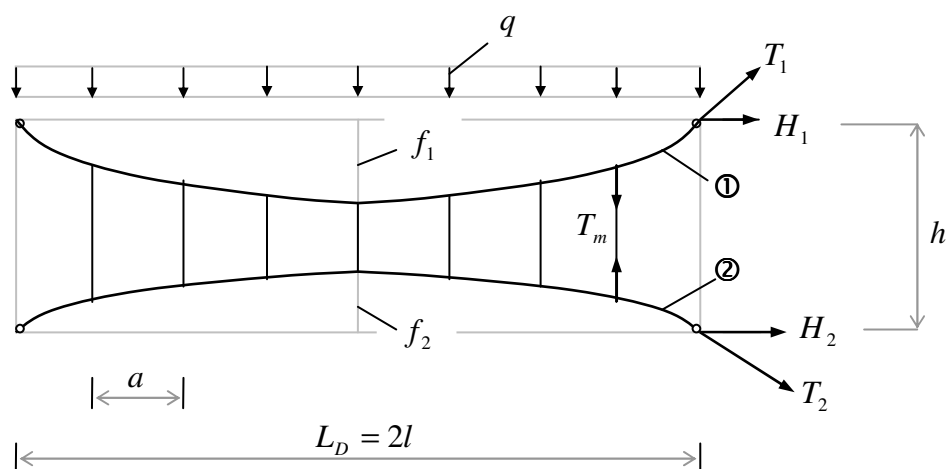
- Calculul liniar procedează cu rigiditatea tangentă. Rezultatele se alterează pe măsura creșterii încărcării. La încărcarea de 25 kN/m, eroarea relativă a săgeții este de 6.9%.
- Calculul neliniar – 1: dă rezultate relativ apropiate de cele exacte.
- Calculul neliniar – 2: dă rezultate cu 2 sau 3 cifre semnificative identice cu cele exacte.
- Calculul neliniar – 3: dă rezultatele cele mai apropiate de cele exacte (în majoritate, 3 cifre semnificative identice).



Săgeata cablului $2l = 140\text{m}$, $f_0 = 12\text{m}$.

2 FERMA CABLU CU MONTANȚI VERTICALI

2.1 Schema de calcul



Ipoteze:

- Montanți inextensibili
- Montanți distribuiți uniform
- Încărcarea uniform distribuită pe cablul superior

Notății:

f : săgeata; L_D deschiderea fermei. $l = L_D/2$: semi-deschiderea; a : lungime panou

T : forța axială în cablu; H : componenta orizontală a lui T .

A : aria secțiunii transversale – cablu; A_m : aria secțiunii montanți.

Mărimile f , A , T , H , vor fi indexate cu indicii: 1 – pentru cablul superior, și 2 – pentru cablul inferior.

Încărcarea uniform distribuită (echivalentă) din montanți: p

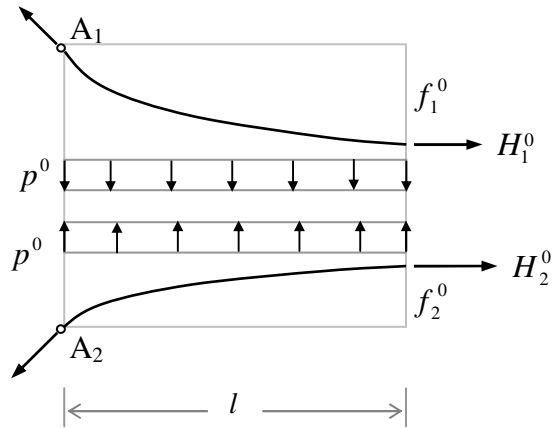
Încărcarea uniform distribuită pe cablu: q

Forța axială în montanți: $T_m = pa$

Mărimile din configurația de pretensionare vor fi indexate cu indicele superior 0. Exemplu:

f_1^0 = săgeata cablului superior, la pretensionare.

2.2 Calculul la pretensionare



Ecuatii de echilibru (momente în A_1, A_2):

$$H_1^0 f_1^0 = \frac{p^0 l^2}{2}; \quad H_2^0 f_2^0 = \frac{p^0 l^2}{2}$$

Rezultă:

$$H_1^0 f_1^0 = H_2^0 f_2^0$$

Calculul la pretensionare

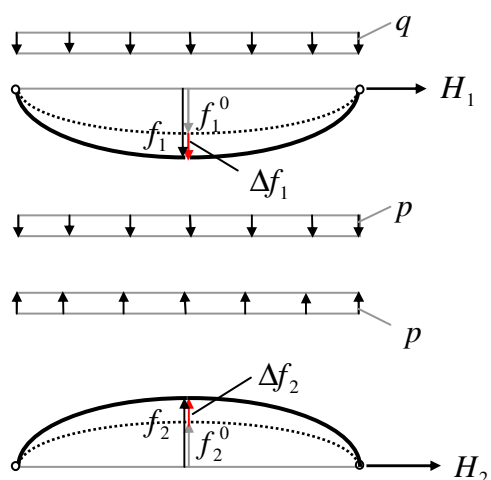
1) Se impune H_2^0 : de exemplu, $H_2^0 \geq 0.2T_{2,r}$.

2) Rezultă:

$$H_1^0 = H_2^0 \frac{f_2^0}{f_1^0}, \quad p^0 = \frac{H_2^0 f_2^0 \cdot 2}{l^2}, \quad T_m = p^0 a.$$

2.3 Încărcare uniformă pe cablul superior – calculul liniar

$$\Delta f_1 = f_1 - f_1^0; \quad \Delta f_2 = f_2 - f_2^0$$



Ipoteze –1:

- Montații inextensibili:

$$f_1^0 + f_2^0 + h_m = h; \quad f_1 + f_2 + h_m = h$$

Scăzând, rezultă:

$$\Delta f_1 + \Delta f_2 = 0, \quad \Delta f_2 = -\Delta f_1$$

Ipoteze – 2, 3:

- Cablurile rămân parabole (conform: încărcarea din montații este $\sim p =$ uniform distribuită)

- Calcul liniar:

$$\Delta q = K^0 \Delta f,$$

unde: $\Delta q = q - q_0$, iar $K = K(f)$ este rigiditatea tangentă a cablului.

Ecuatii:

1) Echilibru

$$H_1 f_1 = (p + q) \frac{l^2}{2}, \quad H_2 f_2 = p \frac{l^2}{2} \quad (24)$$

2) Inextensibilitate:

$$\Delta f_2 = -\Delta f_1 \quad (25)$$

3) Calcul liniar:

$$\Delta f_1 = \frac{\Delta q_1}{K_1^0}, \quad \Delta f_2 = \frac{\Delta q_2}{K_2^0} \quad (26)$$

unde: $\Delta q_1 = (q + p) - p^0$, $\Delta q_2 = p - p^0$.

Eliminăm p în (3), ținând cont de (2):

$$\Delta f_1 = \frac{q + p - p^0}{K_1^0} = \frac{-(p - p^0)}{K_2^0} = \frac{q}{K_1^0 + K_2^0}$$

Rezultă:

$$\Delta f_1 = \frac{q}{K_1^0 + K_2^0}; \quad \Delta f_2 = -\Delta f_1 \quad (27)$$

Apoi:

$$q + p = p^0 + K_1^0 \Delta f_1; \quad p = p^0 - K_2^0 \Delta f_1$$

$$H_1 = \frac{(q + p)l^2}{2f_1}; \quad H_2 = \frac{pl^2}{2f_2}$$

Observații:

- Încărcarea de slăbire montanți: $p = 0$

$$0 = p^0 - K_2^0 \frac{q_{sl_m}}{K_1^0 + K_2^0}$$

$$q_{sl_m} = p^0 \frac{K_1^0 + K_2^0}{K_2^0} \quad (28-1)$$

- Încărcare (sucțiunea) de slăbire a cablului superior: $q + p = 0$

$$0 = p^0 - K_1^0 \frac{q_{sl_cs}}{K_1^0 + K_2^0}$$

$$q_{sl_cs} = -p^0 \frac{K_1^0 + K_2^0}{K_1^0} \quad (28-2)$$

2.4 Încărcare uniformă: ecuația neliniară a săgeții

V. figura de la 2.3. Utilizând ecuația neliniară a săgeții cablului singur (16, §1.7), pentru cablul superior (1) și cablul inferior (2), și ipoteza inextensibilității montanților, ecuațiile pentru ferma cablu vor fi:

$$\frac{B_1}{x_1} - \varphi(x_1) = C_1 \quad (26a)$$

$$\frac{B_2}{x_2} - \varphi(x_2) = C_2 \quad (26b)$$

La acestea se adaugă $f_1 + f_2 = c'$, sau:

$$x_1 + x_2 = c \quad (26c)$$

În ecuațiile anterioare:

$$x_1 = \frac{f_1}{l}; \quad B_1 = \frac{(q+p)l}{EA_1}; \quad (27a)$$

$$x_2 = \frac{f_2}{l}; \quad B_2 = \frac{pl}{EA_2}; \quad (27b)$$

$$C_1 = \frac{B_1^0}{x_1^0} - \varphi(x_1^0); \quad B_1^0 = \frac{p^0 l}{EA_1}; \quad x_1^0 = f_1^0 / l; \quad (27c)$$

$$C_2 = \frac{B_2^0}{x_2^0} - \varphi(x_2^0); \quad B_2^0 = \frac{p^0 l}{EA_2}; \quad x_2^0 = f_2^0 / l. \quad (27d)$$

$$c = (f_1^0 + f_2^0) / l \quad (27e)$$

Dacă Γ^0 este configurația de pretensionare, atunci: $q = 0$, $p = p^0$.

Relațiile (26a-c) constituie un sistem de trei ecuații în necunoscutele x_1, x_2, p .

Observație

- Dacă $q + p \neq 0$ și $p \neq 0$, ecuațiile (26a) și (26b) se scriu:

$$B_1 - x_1(\varphi(x_1) + C_1) = 0, \quad (28a)$$

$$B_2 - x_2(\varphi(x_2) + C_2) = 0. \quad (28b)$$

- Dacă $q + p = 0$, sau $p = 0$, se va lucra *direct pe ecuațiile* (26a, b).

■

Rescriem explicit ecuațiile (28a, b), pentru a elimina p :

$$\frac{(q+p)l}{EA_1} - x_1(\varphi(x_1) + C_1) = 0 \quad (29a)$$

$$\frac{pl}{EA_2} - x_2(\varphi(x_2) + C_2) = 0 \quad (29b)$$

Punem:

$$B_3 = \frac{ql}{EA_1} \quad (30)$$

și înmulțim a doua ecuație cu $\frac{A_2}{A_1}$. Avem:

$$\frac{pl}{EA_1} - x_1(\varphi(x_1) + C_1) + B_3 = 0$$

$$\frac{pl}{EA_1} - \frac{A_2}{A_1} x_2 (\varphi(x_2) + C_2) = 0$$

În fine, scăzând a doua din prima, rezultă:

$$-x_1 (\varphi(x_1) + C_1) + \frac{A_2}{A_1} x_2 (\varphi(x_2) + C_2) + B_3 = 0$$

Sistemul de două ecuații în x_1, x_2 , va fi

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = 0 \\ F_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

în care:

$$F_1(x_1, x_2) = -x_1 (\varphi(x_1) + C_1) + \frac{A_2}{A_1} x_2 (\varphi(x_2) + C_2) + B_3 \quad (31a)$$

$$F_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - c \quad (31b)$$

Sistemul (30) se rezolvă prin metoda Newton.

Jacobianul funcției vector $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ va fi:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -(\varphi(x_1) + C_1 + x_1 \varphi'(x_1)); \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{A_2}{A_1} (\varphi(x_2) + C_2 + x_2 \varphi'(x_2))$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 1$$

În particular, $\varphi'(x) = 2k(x)$ – vezi (15').

Cu expresiile (20-21) ale funcțiilor $\varphi(x)$ și $k(x)$ se obțin ecuațiile neliniare ale săgeților.

După găsirea soluției x_1, x_2 , necunoscuta p se determină din (29b):

$$p = \frac{EA_2}{l} x_2 (\varphi(x_2) + C_2) \quad (32)$$

Sau, din (27b) și (28b), avem: $p = EA_2 B_2 / l$, în care $B_2 = x_2 (\varphi(x_2) + C_2)$.

Cazurile $q + p = 0$ sau $p = 0$

În aceste cazuri se lucrează pe ecuațiile (26a, b) – v. *Observația* de mai sus.

1) Încărcarea de slăbire montanți:

$$q = q_{sl_m} \Leftrightarrow p = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0$$

Avem și:

$$B_1 = \frac{q_{sl_m} l}{EA_1}$$

Rezultă din ecuația (26b):

$$\varphi(x_2) + C_2 = 0, \quad (33)$$

care se rezolvă prin metoda Newton. Cu soluția x_2 se găsește $x_1 = c - x_2$. Cu acesta se

determină B_1 din (26a):

$$B_1 = x_1(\varphi(x_1) + C_1),$$

și apoi:

$$q_{sl_m} = \frac{B_1 EA_1}{l}$$

2) Încărcarea de slăbire cablu superior:

$$q = q_{sl_cs} \Leftrightarrow q + p = 0 \Leftrightarrow B_1 = 0$$

Rezultă din ecuația (26a):

$$\varphi(x_1) + C_1 = 0 \quad (34)$$

Aceasta se rezolvă cu metoda Newton. Cu soluția x_1 se găsește $x_2 = c - x_1$. Cu acesta se

determină B_2 din (26b):

$$B_2 = x_2(\varphi(x_2) + C_2)$$

și:

$$p_{sl_cs} = \frac{EA_2 B_2}{l}$$

$$q_{sl_cs} = -p_{sl_cs}.$$

■

Observație – Ecuația-1 a săgeții

Pentru Ecuația-1 a săgeții (funcția $\varphi(x)$ din (20)) rezultă *formule explicite* pentru cazurile 1, 2.

Notați însă, că Ecuația-1 este cea mai puțin precisă.

Avem: $\varphi(x) = \ln(4x^2 + 3)$.

Încărcarea de slăbire montanți:

Ecuția (33) este:

$$\ln(4x_2^2 + 3) = -C_2$$

Rezultă:

$$x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-C_2} - 3}; \quad x_1 = c_0 - x_2;$$

$$B_{1,sl_m} = x_1[\ln(4x_1^2 + 3) + C_1]$$

$$q_{sl_m} = \frac{B_{1,sl_m} \cdot EA_1}{l} \quad (35)$$

Încărcarea de slăbire cablu superior:

$$q = q_{sl_cs} \Leftrightarrow q + p = 0$$

Ca mai sus, din ecuația (34), rezultă:

$$x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{e^{-C_1} - 3}; \quad x_2 = c_0 - x_1$$

$$B_{2,sl_cs} = x_2[\ln(4x_2^2 + 3) + C_2]$$

$$p_{sl_cs} = \frac{EA_2 B_{2,sl_cs}}{l}$$

$$q_{sl_cs} = -p_{sl_cs}$$

■

2.5 Exemplu

Se consideră ferma-cablu cu următoarele caracteristici:

$$2l = 60 \text{ m}; f_1 = 5 \text{ m}; f_2 = 3 \text{ m}; a = 5 \text{ m}$$

$$A_1 = 24.0 \text{ cm}^2; A_2 = 18.5 \text{ cm}^2; A_m = 0.57 \text{ cm}^2$$

$$H_2^0 = 480.5 \text{ kN}; E = 16500 \text{ kN/cm}^2; \sigma_{im} = 106 \text{ kN/cm}^2.$$

Raportul săgeată/deschidere este 1/12 pentru cablul superior și 1/20 pentru cablul inferior.

Forța de pretensionare a cablului inferior H_2^0 , reprezintă 24.5% din forța de rupere a acestuia.

Ferma este încărcată cu $q = -4, \dots, 12$ (pas = 2) kN/m.

Observație: la $q = 14$ kN/m, programul NELSAS dă mesajul: “matrice de rigiditate nepozitiv definită”.

Ferma este analizată prin:

- Calcul liniar
- Calcul neliniar
- Programul NELSAS

Pentru NELSAS, forțele axiale inițiale s-au luat cele corespunzătoare calculului liniar, și anume:

$$T_1^0 = H_1^0 = 288.3 \text{ kN}; T_2^0 = H_2^0 = 480.5 \text{ kN}; T_m = 16.0167 \text{ kN}.$$

Rezultatele programului NELSAS sunt considerate “exacte”.

Rezultatele sunt prezentate în tabelele și graficele următoare.

Calculul aproximativ produce următoarele rezultate:

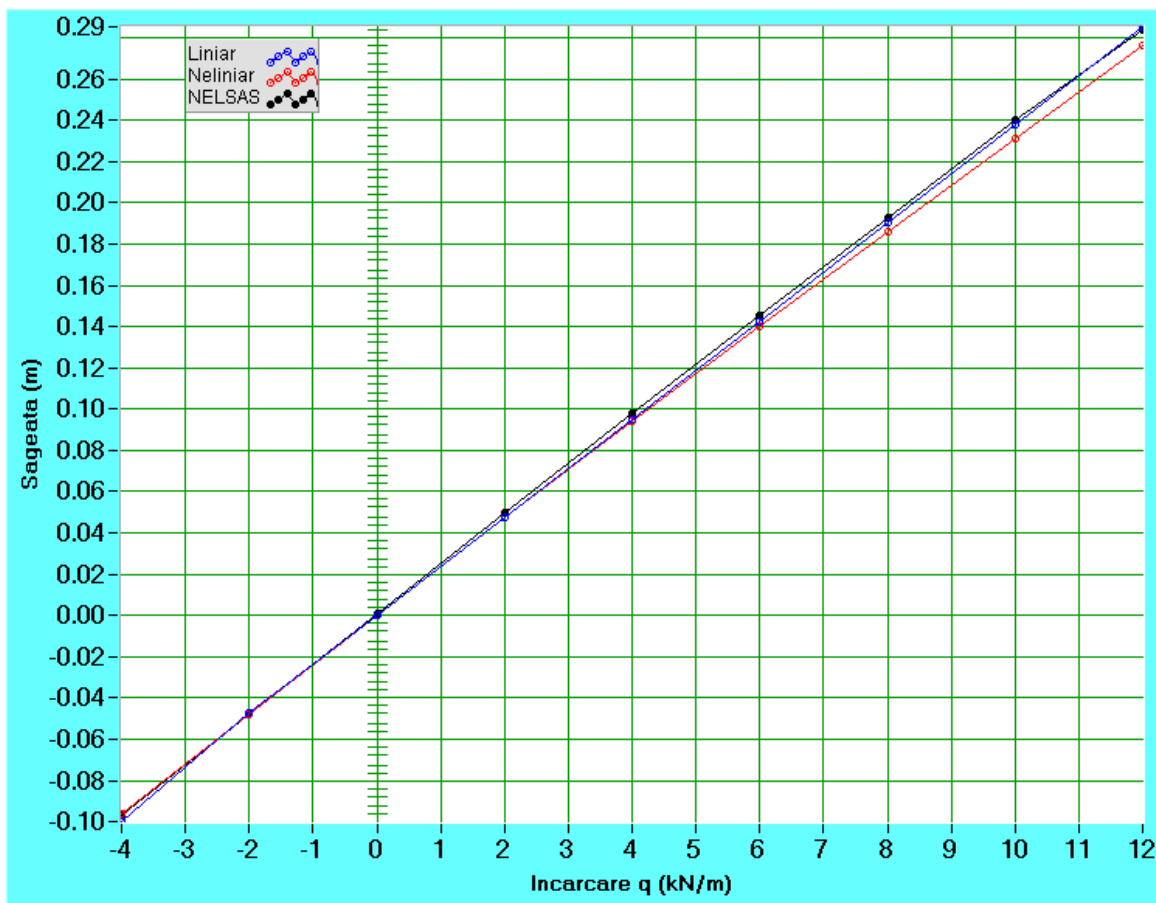
Incarcare echivalenta din pretensionare: 3.203333

Încărcarea	Tip calcul			
	Liniar	Neliniar-1	Neliniar-2	Neliniar-3
De slăbire montați	13.48315	16.85651	16.53948	16.56770
De slăbire cablu superior	-4.201537	-4.279066	-4.304929	-4.302867

1. Comparația săgeții (Δf):

q	Liniar	Neliniar-1	Neliniar-2	Neliniar-3	NELSAS*
-4.0	-0.095097	-0.096125	-0.098805	-0.098647	-0.096886
-2.0	-0.047548	-0.047805	-0.049150	-0.049066	-0.047931
0.0	0.000000	0.000000	-0.000006	0.000003	0.00089673
2.0	0.047548	0.047292	0.048631	0.048561	0.049468
4.0	0.095097	0.094071	0.096760	0.096609	0.097699
6.0	0.14264	0.14034	0.14438	0.14415	0.14553
8.0	0.19019	0.18610	0.19150	0.19119	0.19293
10.0	0.23774	0.23136	0.23812	0.23772	0.23987
12.0	0.28529	0.27612	0.28425	0.28375	0.28375

* Nod central, cablu superior

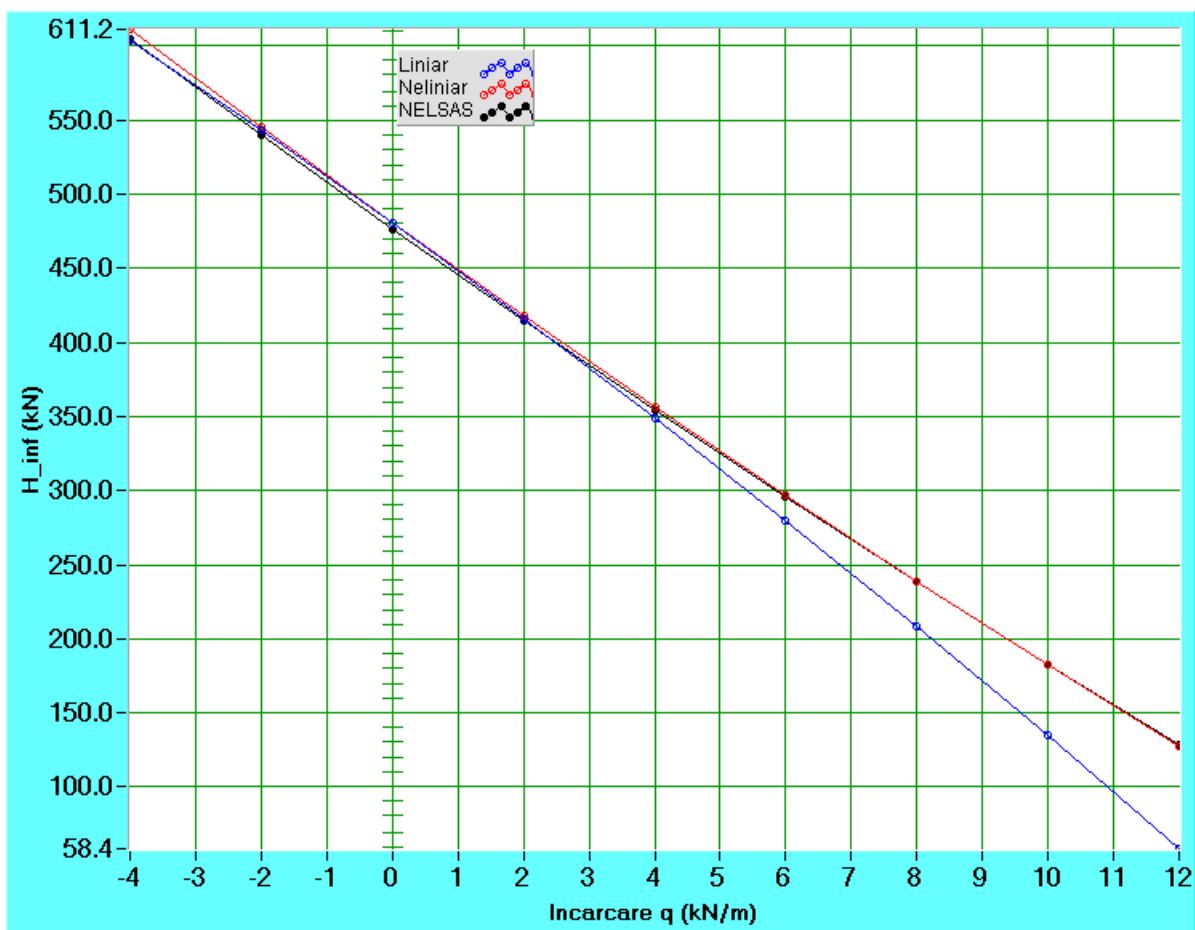


Ferma cablu - Sageata

2. Comparația H-inferior (H_2):

q	Liniar	Nelinear-1	Nelinear-2	Nelinear-3	NELSAS*
-4.0	603.905	611.197	613.219	613.047	604.841
-2.0	543.165	544.996	546.003	545.916	539.737
0.0	480.500	480.497	480.492	480.489	476.287
2.0	415.816	417.668	416.654	416.737	414.466
4.0	349.015	356.477	354.459	354.629	354.250
6.0	279.991	296.891	293.876	294.135	295.610
8.0	208.630	238.877	234.876	235.222	238.517
10.0	134.812	182.400	177.424	177.861	182.940
12.0	58.4098	127.427	121.491	122.017	128.849

* Forta axială minimă

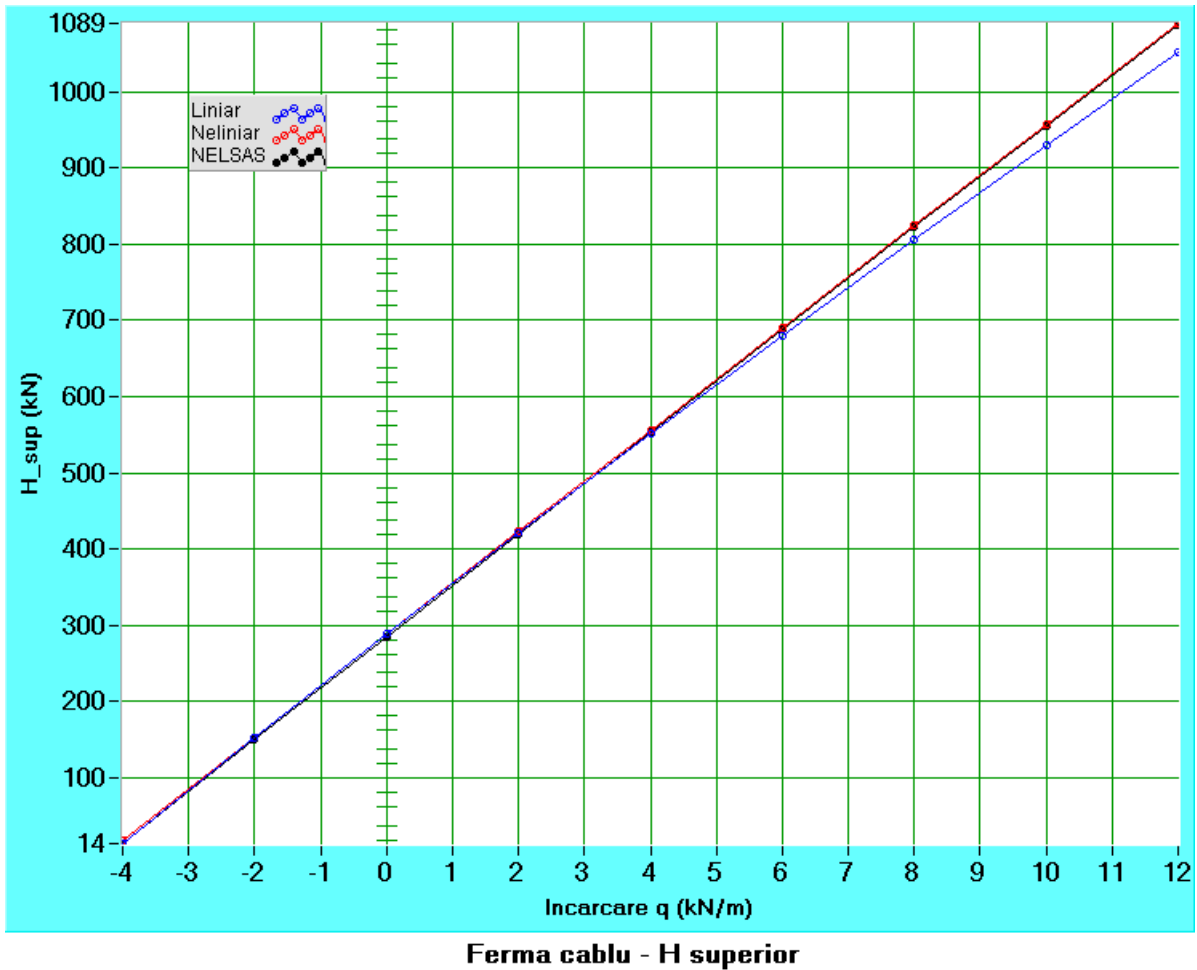


Ferma cablu - H inferior

3. Comparația H-superior (H_1)

q	Liniar	Neliniar-1	Neliniar-2	Neliniar-3	NELSAS*
-4.0	14.0971	18.8313	20.4531	20.3242	15.132
-2.0	152.515	153.678	154.488	154.422	150.607
0.0	288.300	288.299	288.296	288.293	285.706
2.0	421.527	422.654	421.837	421.897	420.402
4.0	552.267	556.706	555.074	555.198	554.667
6.0	680.590	690.423	687.973	688.161	688.476
8.0	806.562	823.774	820.504	820.756	821.803
10.0	930.246	956.731	952.636	952.954	954.626
12.0	1051.71	1089.27	1084.34	1084.73	1086.92

* Forta axială minimă



4. Comparația forță axială în montanți (T_m):

q	Liniar	Neliniar-1	Neliniar-2	Neliniar-3	NELSAS (minim - maxim)
-4.0	20.7683	21.0261	21.1138	21.1068	20.7876 - 20.8247
-2.0	18.3925	18.4561	18.4983	18.4948	18.2138 - 18.2859
0.0	16.0167	16.0166	16.0164	16.0163	15.8692 - 15.8738
2.0	13.6409	13.7028	13.6633	13.6664	13.5754 - 13.6957
4.0	11.2651	11.5100	11.4342	11.4403	11.4001 - 11.6376
6.0	8.8893	9.4334	9.3244	9.3334	9.3439 - 9.67364
8.0	6.5134	7.4686	7.3294	7.3411	7.4028 - 7.78653
10.0	4.1376	5.6111	5.4447	5.4589	5.57340 - 5.96451
12.0	1.7618	3.8566	3.6660	3.6826	3.85209 - 4.19918

Concluzii:

- Ipoteza montanților inextensibili se confirmă prin deplasări aproape egale ale nodurilor de capăt ale montanților. De exemplu, pentru treapta de încărcare $q = 6 \text{ kN/m}$, deplasările nodurilor centrale ale cablului superior și inferior sunt, respectiv, 0.1455 m și 0.1441 m (rezultate NELSAS).
- Ipoteza montanților uniform distribuiți se confirmă prin tensiunea cvasi-constantă în montanți (v. pct.4, coloana NELSAS).
- **Calculul neliniar:** Rezultatele sunt foarte apropiate de cele oferite de programul NELSAS.
- **Calculul liniar:** dă rezultate apropiate de cele exacte, până la o încărcare de cca. 50% din încărcarea de slăbire a montanților. Pentru săgeți: Calculul liniar dă rezultate foarte apropiate cele exacte.

În concluzie, calculul aproximativ neliniar (sau cel liniar, pentru încărcări mici) – poate fi utilizat pentru analiza fermelor-cablu cu montanți verticali, la încărcare uniform distribuită pe cablul superior. În special, această analiză este utilă la pre-dimensionarea fermei-cablu. Alte cazuri de încărcare se vor trata prin programul NELSAS ■