

Capitolul 1

CONSIDERAȚII GENERALE

1 SISTEME STRUCTURALE

Structurile din bare articulate și cabluri sunt structuri în care elementele lucrează exclusiv la forțe axiale. În particular, structurile pe cabluri lucrează numai la întindere și se mai numesc structuri în tensiune.

Sistemele structurale se împart în:

- Sisteme suspendate, și
- Sisteme din bare articulate.

A) Sisteme suspendate

Acestea sunt structuri fixate în ancoraje, la care principalele elemente de rezistență lucrează la întindere.

Structurile *suspendate pe cabluri* sunt cele la care elementele principale sunt cablurile.

Sistemele suspendate sunt utilizate la:

- Acoperișuri suspendate (săli de sport, pavilioane de expoziție, auditorii, arene, etc.)
- Traversări (conduite, bandă transportoare, pasarele)
- Poduri suspendate

B) Sisteme din bare articulate (și cabluri)

Sunt rețele spațiale de bare articulate incluzând (sau nu) și cabluri. Sunt utilizate la:

- Acoperișuri (grinzi cu zăbrele spațiale, cupole, etc.)
- Turnuri de susținere (Ex.: tuburi de fum), antene, etc.
- Turnuri de săpare și extracție.

Caracteristici comune:

Sunt în general *structuri flexibile*, care dezvoltă deplasări mari la modificarea încărcării – și în consecință necesită o analiză statică sau dinamică neliniară, chiar dacă curba caracteristică este liniară. Structura are cel puțin neliniaritate geometrică.

1.1 Sisteme suspendate – Tipuri, clasificare

Considerând o membrană imaginară întinsă pe cabluri (deseori, aceasta este materializată de învelitoare), sistemele suspendate se clasifică în funcție de numărul de straturi și după curbura suprafeței membranei.

1) După numărul de straturi:

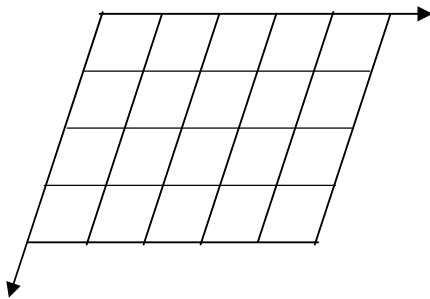
- Sisteme într-un singur strat
- Sisteme în două straturi

2) După curbura suprafeței membranei întinsă pe cabluri:

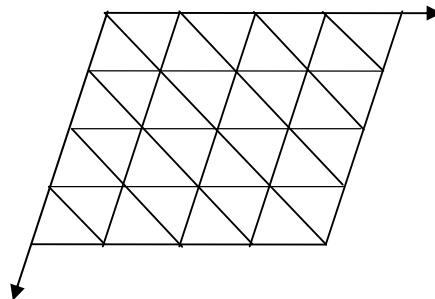
- Suprafețe cu simplă curbură (cilindrice: curbura numai pe o direcție)
- Suprafețe cu dublă curbură:
 - Același tip de curbură în toate direcțiile (curbură gaussiană pozitivă)
 - Au curvuri opuse după direcțiile principale (curbură gaussiană negativă)

a) Sisteme într-un singur strat

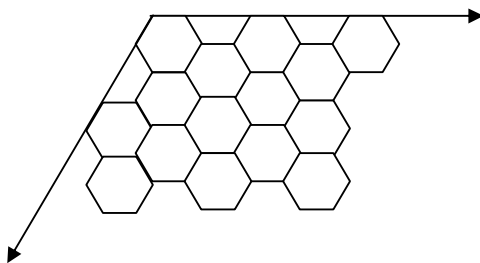
Proiectate pe plan, cablurile pot fi dispuse paralel, radial sau în ochiuri.



a-1) Cabluri – paralel pe două direcții



a-2) Cabluri – paralel pe trei direcții



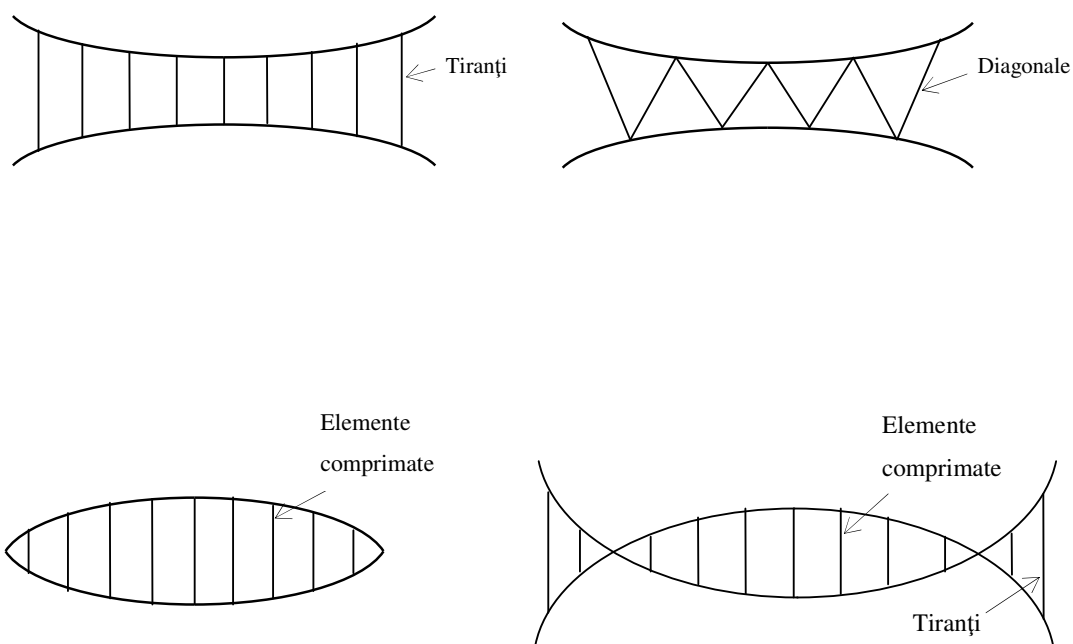
a-3) Cabluri dispuse în ochiuri (rețea hexagonală)

b) Sisteme în două straturi

Au două rânduri de cabluri plasate unele sub altele și legate prin montanți sau diagonale. Acestea pot fi elemente care rezistă numai la întindere (cabluri) sau elemente care rezistă și la compresiune.

Învelitoarea este plasată pe unul din cabluri zis cablu purtător sau principal, celălalt servind la pretensionarea sistemului (cablu secundar).

Cel mai răspândit sistem este acela de ferme-cablu.



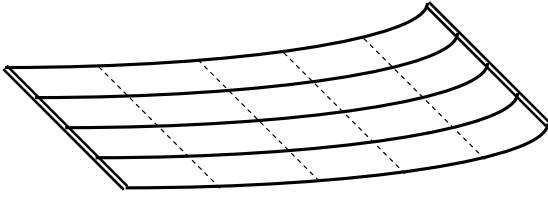
Tipuri de ferme-cablu

Pentru acoperirea unor suprafețe circulare, un sistem răspândit este acela al ”roții de bicicletă”. El constă în ferme-cablu dispuse radial, și ancorate în două inele – unul marginal (comprimat) și unul central (întins).

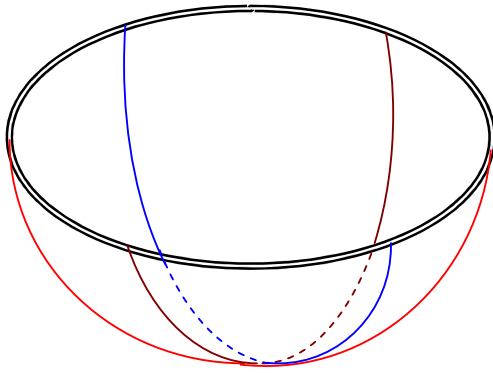
2) Sisteme cu curbură

1. suprafață cilindrică (simplă curbură)
2. suprafață de rotație (curbură gaussiană pozitivă)
3. paraboloid hiperbolic (curbură gaussiană negativă)

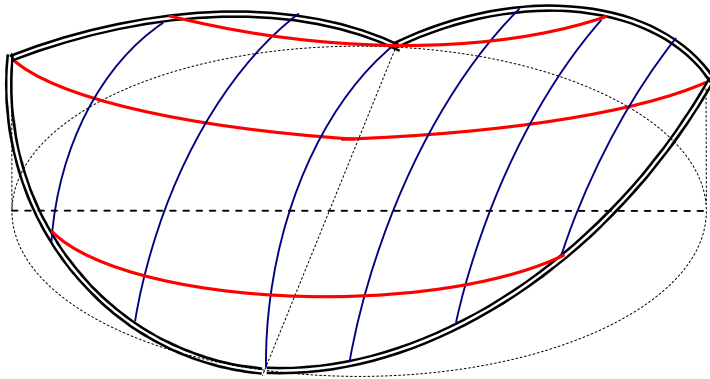
Exemple:



(a)



(b)



(c)

1.2 Rețele spațiale din bare articulate și cabluri

Formele sunt foarte duverse și adaptate funcționalităților.

Vom prezenta câteva exemple.

1 – Turnuri de susținere tuburi de fum (tipizate)

2 – Acoperiș suspendat pentru patinoar artificial (Proiect – mun. Sf. Gheorghe)

3 – Cupolă sferică în dublu strat (Globe Arena – Stockholm)

2 AVANTAJE ALE SISTEMELOR SUSPENDATE (și sistemelor din bare articulate)

Avantajele constau în:

- 1) Posibilitatea de a acoperi arii mari fără structuri de susținere interioare
- 2) Economicitate
- 3) Posibilitatea realizării unei expresii arhitecturale de o plastică deosebită

Economicitatea decurge din:

- a) folosirea integrală a capacității de rezistență a materialului (tensiunile sunt uniform distribuite pe secțiune)
- b) forța axială este aproximativ constantă în cablu
- c) cablul este alcătuit din material de înaltă rezistență (Exemplu – cabluri de oțel: $\sigma_r \approx 100 \text{ kN/cm}^2$)
- d) timp scurt de execuție și cantitate minimă de cofraj

Economicitatea este influențată de modul de pretensionare și de mărimea pretensionării.

S-a arătat că sistemele suspendate sunt structuri flexibile – de aceea trebuie mărită rigiditatea acestora. Aceasta se realizează prin:

- Încărcări de greutate: la sistemele cu simplă curbura
- Pretensionare: la sistemele într-un singur strat cu curburi opuse pe două direcții sau la sistemele în dublu strat.

Este preferabilă a doua soluție – prima ducând la structuri de margine și fundații dezvoltate, care măresc costul construcției.

Mărimea forțele de pretensionare este dictată de două condiții:

- (1) Limitarea deplasărilor – în funcție de destinația structurii
- (2) Asigurarea unei rezerve de tensiune astfel ca, la încărcarea cea mai defavorabilă, elementele de cablu *să nu slăbească*.

Uneori se renunță la condiția (2) în cazul unor încărcări excepționale – pentru a nu mări excesiv secțiunea cablurilor. În acest caz, acoperișul trebuie să fie flexibil și să se prevadă posibilitatea unor mici avarii locale.

■

Exemplu de costuri

Un studiu comparativ de costuri a fost realizat (v. Krishna (1978), Fig. 6-1), pentru un acoperiș cu simplă curbură alcătuit din ferme, cu următoarele caracteristici:

- Deschidere: 30 ... 150 m.
- Travee = 4 m
- Săgeată superioară/deschidere = 1/8 ... 1/16
- Săgeată inferioară/deschidere = 1/18 ... 1/12
- Ancoraje: de greutate sau în tensiune.

Concluzii:

- Pentru deschideri de 90-120 m, sistemele structurale utilizate se ordonează ca mai jos, în ordinea descrescătoare a costurilor pe m²:
 - a) Acoperiș de greutate, ancoraje de greutate
 - b) Ferme-cablu pretensionate, săgeată constantă, ancoraje de greutate
 - c) Ferme convenționale
 - d) Ferme-cablu pretensionate, săgeată variabilă, ancoraje de greutate
 - e) Acoperiș de greutate, ancoraje în tensiune
 - f) Ferme-cablu pretensionate, săgeată constantă, ancoraje în tensiune
 - g) Ferme-cablu pretensionate, săgeată variabilă, ancoraje în tensiune**

Legenda: Săgeată constantă: săgeata superioară = săgeata inferioară; săgeată variabilă: săgeata superioară > săgeata inferioară.

- Pentru deschideri de peste 150 m: Fermele convenționale (c) au costul cel mai ridicat, și fermele (g) cel mai redus. Raportul costurilor (g):(c) este de cca. 1:2.
- Pentru deschideri până la 50 m: fermele convenționale (c) au costul cel mai redus, urmate de (g). Peste această deschidere, costul cel mai redus este pentru sistemul (g).

Concluzie generală: sistemul (g) este cel mai eficient – pentru deschideri peste 50 m.

■

3 ANALIZA STATICĂ A SISTEMELOR SUSPENSATE

Analiza statică cuprinde următoarele două probleme:

- 1) Determinarea configurației de echilibru sub pretensionare
- 2) Determinarea configurației de echilibru (deplasărilor) și a forțelor axiale la o încărcare dată.

Modelarea structurii

Două modele se adoptă:

- a) Modelul continuu:

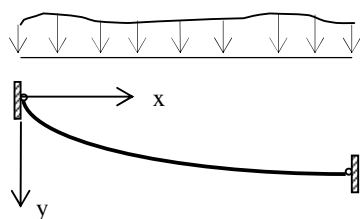
Rețeaua se înlocuiește cu o membrană echivalentă. E aplicat numai la rețele într-un singur strat, cu cabluri dese. Este părăsit astăzi.

- b) Modelul discret:

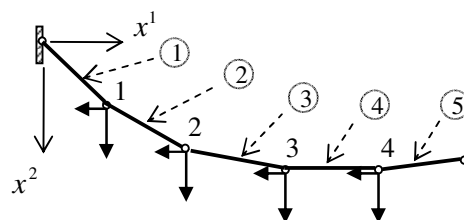
Sistemul se modelează ca un asamblaj de elemente având rigiditate numai la eforturi axiale, articulate în noduri. Încărcările se consideră aplicate în noduri (încărcare echivalentă de nod).

Elementele se consideră drepte (cazul cel mai frecvent), sau curbe.

Cele două modele sunt prezentate în figurile de mai jos, pentru un cablu plan.



a) Model continuu



1 Nod

① Element

b) Model discret

Analiza liniară și neliniară (modelul discret)

Pentru un sistem cu N noduri deplasabile, necunoscutele problemei sunt:

- Deplasările de nod $\mathbf{U}_K = \{U_K^1, U_K^2, U_K^3\}$, $K = \overline{1, N}$, care se assemblează în vectorul $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_n]^T$, unde $n = 3N$.
- Forțele axiale în elemente.

În teoria liniar-elastică a structurilor, avem relația

$$\mathbf{KU} = \mathbf{P}, \quad (1)$$

în care $\mathbf{P} = [P_1, P_2, \dots, P_n]^T$ este vectorul forțelor echivalente de nod, iar \mathbf{K} matricea de rigiditate.

Această teorie se bazează pe două ipoteze:

- (1) Deformații și deplasări infinitesimale (astfel că relația deformații-deplasări este liniară)
- (2) Comportare liniar elastică a materialului

Când (1) sau (2) nu sunt realizate, structura are un răspuns neliniar, și anume:

- (a) Deplasări mari: neliniaritate geometrică
- (b) Comportare elasto-plastică: neliniaritate fizică (sau, de material)

Cel puțin neliniaritatea (a), este prezentă pentru structurile suspendate și din bare articulate.

Relația deplasări-forțe de nod ia forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P} \quad (2)$$

sau

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_K, \quad K = \overline{1, N},$$

$$\text{unde } \mathbf{P}_K = [P_K^1, P_K^2, P_K^3]^T.$$

Ecuția neliniară (2) se rezolvă cu metoda Newton.

Observație – Metoda Newton

Esențialul metodei Newton constă în următoarele. Ecuția (2) se scrie

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2')$$

Fie $\mathbf{U}^{(0)}$ o configurație de referință, dezvoltăm $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ în jurul lui $\mathbf{U}^{(0)}$:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{(0)}) + \mathbf{A}(\mathbf{U}^{(0)})(\mathbf{U} - \mathbf{U}^{(0)}) + \dots$$

Neglijând termenii de ordinul 2 și superior în $\mathbf{U} - \mathbf{U}^{(0)}$, se obține:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{U}^{(0)})\Delta\mathbf{U}^{(1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{U}^{(0)}) \\ \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(0)} + \Delta\mathbf{U}^{(1)} \end{cases}$$

Se continuă procedeul plecând de la configurația $\mathbf{U}^{(1)}$, etc. Se demonstrează că, în anumite ipoteze asupra lui \mathbf{F} (sau \mathbf{f} , dacă \mathbf{P} nu depinde de \mathbf{U}), metoda Newton converge și ordinul de convergență este doi.

(Dacă:

- \mathbf{F} are derivate parțiale de ordinul 1, continue pe o vecinătate a rădăcinii $\boldsymbol{\alpha}$;
- jacobianul lui \mathbf{F} este nesingular în $\boldsymbol{\alpha}$: $\det(\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha})) \neq 0$;
- \mathbf{F} are derivate parțiale de ordinul 2, mărginite pe $\|\mathbf{U} - \boldsymbol{\alpha}\| \leq \rho$, și
- $\mathbf{U}^{(0)}$ este suficient de apropiat de $\boldsymbol{\alpha}$,

atunci metoda Newton are convergență pătratică.)

■

Schema practică de iterare în metoda Newton este:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{U}^{(k)})\Delta\mathbf{U}^{(k+1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{U}^{(k)}) \\ \mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + \Delta\mathbf{U}^{(k+1)} \end{cases} \quad (3)$$

în care:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial U_j} \right]_{\mathbf{U}} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial U_j} \right]_{\mathbf{U}} \quad (4)$$

este matricea jacobian a funcției \mathbf{f} . (Ultima egalitate are loc conform faptului că \mathbf{P} nu depinde de \mathbf{U}).

Explicit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial U_1} & \frac{\partial f_1}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial U_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial U_1} & \frac{\partial f_n}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial U_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{U}}$$

Prima ecuație (3) se rezolvă printr-o metodă de reducere pentru sisteme liniare (Cholesky, Gauss).

Procesul iterativ (3) se oprește cu testele:

$$\|\Delta\mathbf{U}^{(k)}\| \leq EPS$$

Numărul de iterații $k \leq LNIT$,

unde EPS și $LNIT$ (numărul limită de iterații) se aleg dinainte.

Observații

- Matricea jacobian $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ se mai numește matricea de rigiditate tangentă. Aceasta, pentru că în cazul $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{K}\mathbf{U}$ rezultă $\mathbf{A} = \mathbf{K} = \text{constant}$.
- Frecvent, se alege $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0}$, astfel că $\mathbf{U}^{(1)} = \Delta\mathbf{U}^{(1)}$.
- Soluția $\mathbf{U}^{(1)}$, de la pasul 1 al iterației, constituie *răspunsul liniar* al structurii.

■

4 ANALIZA DINAMICĂ

Cuprinde calculul răspunsului dinamic, pe un interval $[t_0, TT]$, la o excitație $\mathbf{P}(t)$.

Răspunsul dinamic este:

- Răspunsul în deplasări, viteze și accelerații: $\mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t), \ddot{\mathbf{U}}(t)$
- Răspunsul în forțe axiale (sau, în tensiuni)

Modelarea pentru analiza dinamică, constă în modelul structural (continuu sau discret) și modelarea caracteristicilor dinamice.

Modelul structural adoptat este cel discret (structura modelată prin elemente finite), rezultând un model dinamic ca sistem cu un număr finit de grade de libertate.

Modelarea caracteristicilor dinamice constă în:

- modelarea distribuției maselor (inerțială)
- modelarea elastică
- modelarea amortizării
- modelarea acțiunilor dinamice

Analiza liniară și neliniară

Ecuția vibrațiilor *liniare* ale unui sistem cu mai multe grade de libertate, este

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \quad (1)$$

Ecuția vibrațiilor *neliniare* este

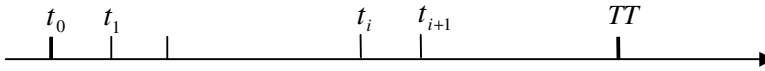
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t) \quad (2)$$

La ecuațiile (3), (4), se atașează condițiile inițiale $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_0), \dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{U}}(t_0)$, presupuse date.

- Ecuția (1) se rezolvă prin una din următoarele metode: Analiză modală sau Integrare directă.
- Ecuția (2) se rezolvă prin integrare directă.

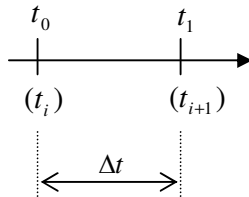
Întrucât structurile din bare articulate și cabluri au comportare neliniară, se adoptă modelul descris de ecuația (2), și metoda de rezolvare prin integrare directă.

Integrarea directă constă în calculul răspunsului dinamic în puncte discrete t_i ale intervalului de răspuns $[t_0, TT]$, distanțate cu pasul $\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$:



Pasul se ia de obicei constant Δt , astfel că $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.

Intervalul curent $[t_i, t_{i+1}]$ se poate nota generic $[t_0, t_1]$, ca în figura de mai jos:



Calculul răspunsului se face cu un operator de integrare directă. Un exemplu este operatorul NEWMARK definit, pentru intervalul curent $[t_0, t_1]$, de formulele:

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = \bar{\mathbf{U}}_0 + \beta(\Delta t)^2 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1$$

$$\dot{\bar{\mathbf{U}}}_1 = \dot{\bar{\mathbf{U}}}_0 + \gamma(\Delta t) \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1 = \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_0 + \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1,$$

În aceste formule:

Mărimile notate cu indicele 0, respectiv 1 sunt calculate în t_0 , respectiv în t_1 . Exemplu:

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}(t_1); \quad \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0).$$

$\Delta \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1 = \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_1 - \ddot{\bar{\mathbf{U}}}_0$ este creșterea de accelerație la sfârșitul intervalului.

β și γ sunt coeficienții operatorului.

$\bar{\mathbf{U}}_1$ și $\dot{\bar{\mathbf{U}}}_1$ sunt seriile Taylor trunchiate date de :

$$\bar{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_0 + \dot{\mathbf{U}}_0(\Delta t) + \ddot{\mathbf{U}}_0(\Delta t)^2 / 2$$

$$\dot{\bar{\mathbf{U}}}_1 = \dot{\mathbf{U}}_0 + \ddot{\mathbf{U}}_0(\Delta t)$$

Observație

\mathbf{U}_0 și $\dot{\mathbf{U}}_0$ sunt condițiile inițiale ale mișcării și sunt date.

$\ddot{\mathbf{U}}_0$ se calculează din ecuația de mișcare scrisă pentru $t = t_0$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{P}(t_0) - \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_0)$$

■

Rezolvarea ecuației (2)

Ecuația (2) scrisă pentru $t = t_1$ este:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_1) = \mathbf{P}(t_1)$$

sau, în virtutea formulelor operatorului,

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}}_1 + \gamma\Delta t\Delta\dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1) \quad (3)$$

Ecuația (3) este o ecuație neliniară în necunoscuta $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ și se rezolvă cu metoda Newton.

Să notăm, pentru simplificare,

$$\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$$

Ecuația (3) se scrie:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0},$$

unde

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{W}) + \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}}_1 + \gamma\Delta t\mathbf{W}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2\mathbf{W}) - \mathbf{P}(t_1),$$

sau

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}}_1 + \gamma\Delta t\mathbf{W}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2\mathbf{W}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{P}(t_1). \quad (4)$$

Punând

$$\delta^{(k+1)} = \mathbf{W}^{(k+1)} - \mathbf{W}^{(k)},$$

schema de iterare va fi:

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{W}^{(k)})\delta^{(k+1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{W}^{(k)}) \\ \mathbf{W}^{(k+1)} = \mathbf{W}^{(k)} + \delta^{(k+1)}; \quad \mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4)$$

în care:

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial W_j} \right]_{\mathbf{W}} \quad (5)$$

este matricea jacobian a funcției $\mathbf{F}(\mathbf{W})$.

Se verifică ușor din (4), că

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}) = \mathbf{M} + \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}_1 + \gamma\Delta t\mathbf{W})\gamma\Delta t + \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2\mathbf{W})\beta(\Delta t)^2$$

în care \mathbf{A} și \mathbf{B} sunt matricile jacobian ale funcțiilor \mathbf{f} și \mathbf{g} , respectiv:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = [\partial f_i / \partial U_j], \quad \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial \dot{U}_j].$$

În particular, pentru ecuația liniară (1), \mathbf{A} și \mathbf{B} sunt matrici constante: $\mathbf{A} = \mathbf{K}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Procesul se derulează astfel:

- Se iterează pe *pasul curent* ($\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0, \ddot{\mathbf{U}}_0$ rămân constante), până când se găsește

$$\mathbf{W} = \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1.$$

Testele de oprire a iterației sunt:

$$\|\Delta \mathbf{W}^{(k)}\| \leq EPS, \text{ și}$$

$$Num\bar{a}rul \text{ de iterații } k \leq LNIT.$$

- Cu formulele operatorului se găsesc $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1$, și procesul se repetă pentru următorul interval.

■

Cazul general

Considerăm ecuația de mișcare cu o forma mai generală pentru funcția neliniară de amortizare:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t) \quad (2')$$

Ecuția (3) devine:

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma \Delta t \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2 \Delta \ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1) \quad (3')$$

iar

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma \Delta t \mathbf{W}) + \mathbf{f}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2 \mathbf{W}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{P}(t_1) \quad (4)$$

Schema de iterare este dată de (4, 5).

Avem:

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}$$

$$+ \mathbf{B}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma \Delta t \mathbf{W}) \gamma \Delta t + \mathbf{D}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2 \mathbf{W}, \bar{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma \Delta t \mathbf{W}) \beta(\Delta t)^2 + \mathbf{A}(\bar{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^2 \mathbf{W}) \beta(\Delta t)^2$$

în care

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = [\partial f_i / \partial U_j],$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial \dot{U}_j], \quad \mathbf{D}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial U_j]$$

■