Capitolul 4

DEDUCEREA ECUAȚIILOR DE MIŞCARE

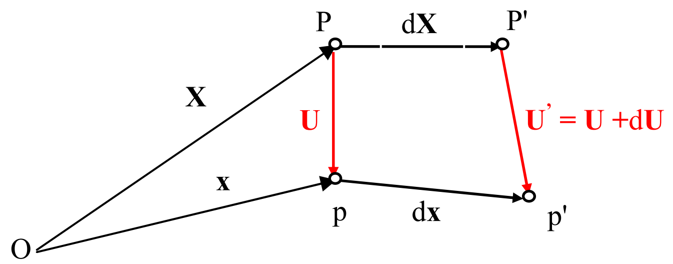
1 PRINCIPIU DE MINIM ABSOLUT ÎN DINAMICA CONTINUULUI ELASTO-PLASTIC, LA DEFORMAȚII FINITE

L.H.N. Lee şi Chi-Mou-Ni au stabilit (1973) un principiu de minim absolut în dinamica continuului supus la deformații finite, utilizând conceptul de variații finite de accelerație. Acest principiu generalizează la mediul continuu, principiul minimei constrângeri al lui Gauss – pentru sisteme de puncte materiale.

1.1 Cinematica deformației

- În configurația inițială: poziția unei particule este dată de $\mathbf{X} = \{X_K\}$
- La momentul *t*: poziția este dată de $\mathbf{x} = \{x_i\}$
- Istoria deformației este:

$$x_m = x_m(X_M, t) \quad m = 1,2,3 \quad M = 1,2,3;$$



Cu vectorul deplasare

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} - \mathbf{X},$$

sau

$$U_K = x_k - X_K; \quad (k = K),$$

rezultă

$$U_K = U_K(X_M, t) \quad K = 1,2,3 \quad M = 1,2,3;$$

- Elementul de lungime: *dS* – inițial, şi *ds* – la momentul *t*.

Presupunem că la momentul *t*, avem o configurație *imaginară* C^* în care (în vecinătatea unui punct), corpul este fără tensiuni şi temperatura este temperatura inițială Θ. Rămân astfel numai deformațiile plastice.

<u>Observație</u> Configurația C^* este una conceptuală, şi numai sub unele condiții ar putea coincide cu o configurație reală. Ea serveşte numai pentru a caracteriza relațiile constitutive ■

Tensorul lagrangeean al deformațiilor este dat de

$$ds^2 - (dS)^2 = 2E_{KL}dX_K dX_L, \quad K, L = 1,2,3 \tag{1}$$

Se utilizează *convenția Einstein* de sumare în raport cu indicele repetat. Adică, explicit, $E_{KL}dX_K dX_L = \sum_K \sum_L E_{KL}dX_K dX_L$.

Avem, pentru elementul *dS*:

$$dS^2 = \sum_K dX_K dX_K = \sum_{K,L} \delta_{KL} dX_K dX_L$$

Sau, cu convenția Einstein:

$$dS^2 = dX_K dX_K = \delta_{KL} dX_K dX_L ,$$

unde δ_{KL} este simbolul Kronecker.

Analog, pentru ds , avem:

$$ds^2 = \sum_i dx_i dx_i \, ; \qquad dx_i = \sum_K \frac{\partial x_i}{\partial X_K} dX_K$$

$$ds^2 = \sum_i \left(\sum_K \frac{\partial x_i}{\partial X_K} dX_K \right) \left(\sum_L (\frac{\partial x_i}{\partial X_L} dX_L) \right) = \sum_i \left[\sum_{K,L} (\frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_i}{\partial X_L} dX_K dX_L) \right]$$

Sau, cu convenția Einstein:

$$ds^2 = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_i}{\partial X_L} dX_K dX_L$$

Notația derivatelor parțiale:

Dacă *f* este o funcție de $X_M, M = 1,2,3$ se notează

$$f_{,M} = \frac{\partial f}{\partial X_M}$$

■

Cu aceasta, rezultă

$$ds^2 = x_{i,K} x_{i,L} dX_K dX_L$$

şi:

$$ds^2 - dS^2 = (x_{i,K} x_{i,L} - \delta_{KL}) dX_K dX_L$$

Comparând cu (1), rezultă:

$$2E_{KL} = x_{i,K} x_{i,L} - \delta_{KL}$$

Sau, ținând cont de:

$$x_i = X_I + U_I\,,$$

$$x_{i,K} = \delta_{IK} + U_{I,K}\,,$$

avem, succesiv:

$$2E_{KL} = (\delta_{IK} + U_{I,K})(\delta_{IL} + U_{I,L}) - \delta_{KL} = \delta_{IK}\delta_{IL} + \delta_{IK} U_{I,L} + \delta_{IL} U_{I,K} + U_{I,K} U_{I,L} - \delta_{KL}$$

Cu $\delta_{IK}\delta_{IL} = \delta_{KL}$ (verificare), rezultă

$$2E_{KL} = \delta_{IK} U_{I,L} + \delta_{IL} U_{I,K} + U_{I,K} U_{I,L}$$

În fine, rezultă:

$$2E_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L} \tag{2}$$

■

Deformația lagrangeeană se poate împărți în partea elastică şi cea plastică, prin:

$$ds^2 - dS^2 = (ds^2 - ds^{*2}) + (ds^{*2} - dS^2) = 2(E'_{KL} + E''_{KL}) dX_K dX_L$$

Deformația elastică E'_{KL} este dată de

$$2E'_{KL} = \left(\frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} \frac{\partial x_k}{\partial x_j^*} - \delta_{ij} \right) x_{i,K}^* x_{i,L}^*$$

iar deformația plastică este

$$2E''_{KL} = x_{k,K}^* x_{k,L}^* - \delta_{KL}$$

Deformația lagrangeeană finită este dată de

$$E_{KL} = E'_{KL} + E''_{KL}$$

* * *

Fie la $t = t_0$ câmpurile adevărate de deplasări şi viteze

$U_K^+(X_1, X_2, X_3, t)$ şi $\dot{U}_K^+(X_1, X_2, X_3, t)$, care sunt date în corp. Indicele superior ”+” va marca un câmp adevărat.

Accelerația reală $\ddot{U}_K^+$ va fi determinată, cu principiul de mimin, dintr-o mulțime de câmpuri admisibile $\ddot{U}_K$ care satisfac condițiile cinematice la limită şi condițiile de continuitate ale corpului.

Accelerația admisibilă a deformației se poate exprima prin:

$$\ddot{E}_{KL} = \tfrac{1}{2}(\ddot{U}_{K,L} + \ddot{U}_{L,K} + \ddot{U}_{M,K}U^+_{M,L} + \ddot{U}_{M,L}U^+_{M,K} + 2\dot{U}^+_{M,K}\dot{U}^+_{M,L})$$

Se va presupune că variațiile de accelerație *nu sunt* însoțite de variații de tensiune (conform ipotezei din mecanica clasică, si anume, că forțele nu depind de accelerație).

1.2 Relații constitutive

Relația constitutivă se ia de forma

$$T_{KL} = T_{KL}(E'_{MN}, E''_{MN}, \dot{E}''_{MN}, \Theta)$$

adică poate depinde şi de viteza deformației (dar nu şi de accelerația acesteia).

1.3 Principiul de minim

Accelerațiile reale $\ddot{U}_K^+$ şi $\ddot{E}_{KL}^+$ se disting dintre accelerațiile admisibile prin aceea că satisfac ecuațiile de mişcare în coordonate lagrangeene:

$$\left[T^+_{KL}(\delta_{ML} + U^+_{M,L})\right]_{,K} + \rho_0(F_M - \ddot{U}^+_M) = 0 \tag{3}$$

Tensiunile Piola-Kirchhoff satisfac condițiile la limită pe partea A_S^0 a suprafeței inițiale A^0, pe care forța S_M pe unitatea de arie e prescrisă.

$$\left[T^+_{KL}(\delta_{ML} + U^+_{M,L})\right]N_K = S_M$$

N_K este normala exterioară la suprafața A_S^0.

Fie $\delta\ddot{\mathbf{U}}$ o clasă de mici variații de accelerație, care îndeplinesc condițiile:

- Sunt continue şi de 3 ori diferențiabile în domeniul V^0 ocupat de corp în configurația C^0;
- Se anulează pe partea de frontieră A_S^0 a lui C^0, pe care deplasările **U** sunt date.

Înmulțim (1) cu $\delta\ddot{U}_M$ şi integrăm pe V^0:

$$\int_{V^0}\left[T^+_{KL}(\delta_{ML} + U^+_{M,L})\right]_{,K}\delta\ddot{U}_M dV^0 + \int_{V^0}\rho^0 F_M \delta\ddot{U}_M dV^0 - \int_{V^0}\rho^0\ddot{U}^+_M\delta\ddot{U}_M dV^0 = 0 \tag{4}$$

Transformăm prima integrală – avem identitatea:

$$\left[T_{KL}^{+}(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\right]_{,K}=\left[T_{KL}^{+}(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\delta\ddot{U}_{M}\right]_{,K}-T_{KL}^{+}(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\delta\ddot{U}_{M,K} \qquad (5)$$

Apoi, cu formula Gauss, transformăm integrala primului termen din membrul doi din (5) în integrală de suprafață:

$$\int_{V^0}\left[T_{KL}^{+}(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\delta\ddot{U}_{M}\right]_{,K}dV^0=\int_{A_S^0}T_{KL}^{+}(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\delta\ddot{U}_{M}N_K dA^0=\int_{A_S^0}S_M\delta\ddot{U}_M dA^0$$

Pentru integrala celui de al doilea membru din (5) avem următoarele: notând cu $\delta_{acc}\ddot{E}_{KL}$ variația lui $\ddot{E}_{KL}$ la variațiile de accelerație admisibile $\delta\ddot{U}_M$, rezultă:

$$\begin{aligned}\delta\ddot{E}_{KL}&=\tfrac{1}{2}(\delta\ddot{U}_{K,L}+\delta\ddot{U}_{L,K}+\delta\ddot{U}_{M,K}U_{M,L}^{+}+\delta\ddot{U}_{M,L}U_{M,K}^{+})\\&=\tfrac{1}{2}\left[(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\delta\ddot{U}_{M,K}+(\delta_{MK}+U_{M,K}^{+})\delta\ddot{U}_{M,L}\right]\end{aligned}$$

şi

$$\sum_{K,L}T_{KL}^{+}\delta_{acc}\ddot{E}_{KL}=\tfrac{1}{2}\left[\sum_{K,L,M}T_{KL}^{+}(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\delta\ddot{U}_{M,K}+\sum_{K,L,M}T_{KL}^{+}(\delta_{MK}+U_{M,K}^{+})\delta\ddot{U}_{M,L}\right]$$

Pentru claritate, s-a indicat în expresia precedentă, sumarea. În ultimul termen, schimbând indicele *L* în *K*, şi ținând cont că $T_{KL}=T_{LK}$ rezultă că cei doi termeni sunt egali şi astfel,

$$T_{KL}^{+}\delta_{acc}\ddot{E}_{KL}=T_{KL}^{+}(\delta_{ML}+U_{M,L}^{+})\delta\ddot{U}_{M,K} \qquad (6)$$

Cu aceasta, integrala termenului al doilea din (5) – membrul doi, va fi:

$$-\int_{V^0}T_{KL}^{+}\delta_{acc}\ddot{E}_{KL}dV^0$$

Integrala (4) devine, înmulțind cu -1,

$$\int_{V^0}\rho^0\ddot{U}_M^{+}\delta\ddot{U}_M dV^0+\int_{V^0}T_{KL}^{+}\delta_{acc}\ddot{E}_{KL}dV^0-\int_{V^0}\rho^0F_M\delta\ddot{U}_M dV^0-\int_{A_S^0}S_M\delta\ddot{U}_M dA^0=0$$

sau

$$\int_{V^0}\rho^0\ddot{\mathbf{U}}^{+}\delta\ddot{\mathbf{U}}dV^0+\int_{V^0}T_{KL}^{+}\delta_{acc}\ddot{E}_{KL}dV^0-\int_{V^0}\rho^0\mathbf{F}\delta\ddot{\mathbf{U}}dV^0-\int_{A_S^0}\mathbf{S}\delta\ddot{\mathbf{U}}dA^0=0 \qquad (7)$$

care se mai poate scrie:

$$\delta_{acc}J=0 \qquad (8)$$

unde

$$J=\int_{V^0}\rho^0\frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2}dV^0+\int_{V^0}T_{KL}^{+}\ddot{E}_{KL}dV^0-\int_{V^0}\rho^0\mathbf{F}\ddot{\mathbf{U}}dV^0-\int_{A_S^0}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{U}}dA^0 \qquad (9)$$

Relația (8) arată că, dintre accelerațiile admisibile, accelerațiile reale fac *staționară* funcționala *J*.

Se demonstrează că, mai mult, accelerațiile reale minimizează funcționala *J*, arătându-se că avem:

$$J(\ddot{\mathbf{U}}^{+}) - J(\ddot{\mathbf{U}}) = -\int_{V^0} \frac{\rho^0}{2} (\ddot{\mathbf{U}}^{+} - \ddot{\mathbf{U}})^2 dV^0 \leq 0$$

de unde,

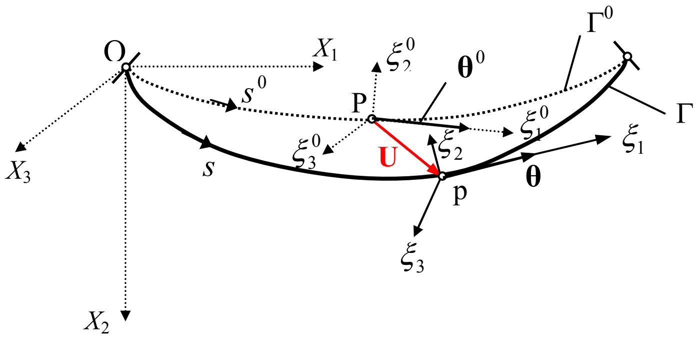
$$J(\ddot{\mathbf{U}}^{+}) \leq J(\ddot{\mathbf{U}})$$

■

2 FUNCȚIONALA *J* PENTRU UN CABLU

2.1 Funcționala J pentru un cablu

Considerăm configurațiile şi reperele definite în Cap.2, §1, reluate în figura de mai jos.



Funcționala *J* în care presupunem $\mathbf{S} = 0$ (nu sunt aplicate forțe de suprafață), devine:

$$J = \int_{V^0} \rho^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} dV^0 + \int_{V^0} T_{KL}^{+} \ddot{E}_{KL} dV^0 - \int_{V^0} \rho^0 \mathbf{F} \ddot{\mathbf{U}} dV^0$$

Reamintim că **F** este densitatea de distribuție a forței pe unitatea de masă. Fie $\mathbf{p}^0$ densitatea de distribuție a încărcării, raportată la lungimea arcului în configurația inițială Γ^0:

$$\mathbf{p}^0 = \frac{\mathbf{F}dm}{ds^0} = \mathbf{F}\frac{\rho^0 dV^0}{ds^0} = \mathbf{F}\rho^0 A^0$$

(conform: $dm = \rho^0 dV^0 = \rho^0 dA^0 ds^0$), unde A^0 este aria secțiunii transversale în configurația Γ^0.

Observație

Dacă densitatea de distribuție a incărcării pe lungimea arcului în Γ este **p**, atunci

$$\mathbf{p}^0 = \frac{\mathbf{p}ds}{ds^0} \ \blacksquare$$

Pentru un cablu (notând domeniul secțiunii transversale tot cu A^0), avem următoarea formulă de calcul pentru integrala de volum:

$$\int_{V^0} \mathbf{f}(P)dV^0 = \int_{\Gamma^0} ds^0 \int_{A^0} \mathbf{f}(P)dA^0$$

În particular, dacă $\mathbf{f}(P) =$ constant pentru $P \in A^0$, rezultă

$$\int_{V^0} \mathbf{f}(P)dV^0 = \int_{\Gamma^0} \mathbf{f}(P)A^0 ds^0$$

Cu ipoteza că vectorii deplasare **U** nu depind decât de s (sau: sunt aceiaşi în toate punctele secțiunii transversale) – Cap.2, §2, rezultă

$$J = \int_{\Gamma^0} \rho^0 A^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} ds^0 + \int_{\Gamma^0} \overset{+}{T}_{KL} \ddot{E}_{KL} A^0 ds^0 - \int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}} ds^0$$

sau

$$J = \int_{\Gamma^0} (\overline{\rho}^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} + A^0 \overset{+}{T}_{KL} \ddot{E}_{KL} - \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}}) ds^0$$

în care

$$\overline{\rho}^0 = \frac{dm}{ds^0} = \rho^0 A^0$$

este densitatea de masă *pe unitatea de lungime inițială*.

<u>Forțe concentrate</u>

Dacă la abscisa $s^0 = \xi^0$ este aplicată o forță concentrată $\overline{\mathbf{P}}$, distribuim uniform $\overline{\mathbf{P}}$ pe un segment $[s_1^0, s_2^0]$ în jurul punctului ξ^0:

$$\mathbf{p}^0 = \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\Delta s^0}, \qquad \Delta s^0 = s_2^0 - s_1^0$$

Integrala ultimului termen din (2) devine

$$J(\overline{\mathbf{P}}) = \int_{s_1^0}^{s_2^0} \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\Delta s^0} \ddot{\mathbf{U}}(s^0) ds^0 = \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\Delta s^0} \int_{s_1^0}^{s_2^0} \ddot{\mathbf{U}}(s^0) ds^0$$

Cu teorema mediei rezultă

$$J(\overline{\mathbf{P}}) = \frac{\overline{\mathbf{P}}}{\Delta s^0} \ddot{\mathbf{U}}(\xi) \Delta s^0 = \overline{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{U}}(\xi), \qquad \text{unde } s_1^0 \le \xi \le s_2^0 \ .$$

Făcând $s_1^0 \to \xi^0$, $s_2^0 \to \xi^0$, rezultă $\xi \to \xi^0$, şi

$$J(\overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}}\ddot{\mathbf{U}}(\xi^0)$$

■

Mase concentrate

Analog, o masă $\overline{m}$ concentrată la $s^0 = \xi^0$ o distribuim uniform pe segmentul $[s_1^0, s_2^0]$, avem

$$\overline{\rho}^0 = \frac{\overline{m}}{\Delta s^0},$$

şi integrala primului termen din (2) se scrie:

$$J(\overline{m}) = \int_{s_1^0}^{s_2^0} \frac{\overline{m}}{\Delta s^0} \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} ds^0 = \frac{1}{2}\overline{m}\ddot{\mathbf{U}}^2(\xi)$$

unde $s_1^0 \le \xi \le s_2^0$. Făcând $s_1^0, s_2^0 \to \xi^0$ rezultă $\xi \to \xi^0$ şi

$$J(\overline{m}) = \frac{1}{2}\overline{m}\ddot{\mathbf{U}}^2(\xi^0)$$

■

Cu acestea, funcţionala J pentru un cablu ia forma

$$J = \int_{\Gamma^0} (\overline{\rho}^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} + A^0 T_{KL}^{+} \ddot{E}_{KL} - \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}}) ds^0 - \sum_J \overline{\mathbf{P}}_J \ddot{\mathbf{U}}_J + \sum_L \frac{1}{2} \overline{m}_L \ddot{\mathbf{U}}_L^2$$

în care $\ddot{\mathbf{U}}_j = \ddot{\mathbf{U}}(\xi_j^0)$, şi sumele se extind la forţele, respectiv masele, concentrate pe cablu.

2.2 *Expresia* $T_{KL}\ddot{E}_{KL}$

2.2.1 Explicitarea în reperul (local) $P\xi_1^0\xi_2^0\xi_3^0$

Reamintim rezultatele din Cap.2:

- Tensorul tensiunilor Piola-Kirchhoff:

$$\begin{cases} T_{\xi_1^0\xi_1^0} = \dfrac{ds^0}{ds}\hat{\sigma} \\ T_{\xi_\alpha^0\xi_\beta^0} = 0, \quad (\alpha,\beta) \ne (1,1) \end{cases}$$

în care

$$\hat{\sigma} = \frac{T^*}{A^0},$$

unde: T^* = forța axială în p (în configurația deformată Γ); A^0 = aria secțiunii transversale în P (în configurația nedeformată Γ^0); $\hat{\sigma}$ = tensiunea în p, *referită la aria nedeformată* A^0.

- Tensorul lagrangeean al deformațiilor:

$$E_{\xi_1^0\xi_1^0} = \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} + \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{U}}{ds^0} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0}$$

$$E_{\xi_\alpha^0\xi_\beta^0} = 0, \text{ pentru } (\alpha,\beta) \neq (1,1).$$

Derivând, rezultă:

$$\dot{E}_{\xi_1^0\xi_1^0} = \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \frac{d\dot{\mathbf{U}}}{ds^0} + \frac{d\dot{\mathbf{U}}}{ds^0} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0},$$

$$\ddot{E}_{\xi_1^0\xi_1^0} = \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0} + \frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} + \frac{d\dot{\mathbf{U}}}{ds^0} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} = (\boldsymbol{\theta}^0 + \frac{d\mathbf{U}}{ds^0})\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0} + \ldots$$

unde termenii nescrişi nu conțin $\ddot{\mathbf{U}}$. Sau:

$$\ddot{E}_{\xi_1^0\xi_1^0} = \mathbf{V}\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0} + \ldots$$

şi

$$T_{\xi_1^0\xi_1^0}\ddot{E}_{\xi_1^0\xi_1^0} = \mathbf{V}\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\left(\frac{ds^0}{ds}\right)\hat{\sigma} + \ldots$$

Acum, ținând cont de $T_{KL}\ddot{E}_{KL} = scalar$, adică este independent de reper, avem

$$T_{KL}\ddot{E}_{KL} = T_{\xi_\alpha^0\xi_\beta^0}\ddot{E}_{\xi_\alpha^0\xi_\beta^0} = T_{\xi_1^0\xi_1^0}\ddot{E}_{\xi_1^0\xi_1^0}$$

rezultă

$$T_{KL}\ddot{E}_{KL} = \mathbf{V}\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\left(\frac{ds^0}{ds}\right)\hat{\sigma} + \ldots$$

2.2.2 Explicitarea în reperul (general) $OX_1X_2X_3$

Acelaşi rezultat se obține lucrând în reperul $OX_1X_2X_3$, în care E_{KL} este dat de (2):

$$2E_{KL} = U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}$$

Derivând, obținem:

$$2\dot{E}_{KL} = \dot{U}_{K,L} + \dot{U}_{L,K} + \dot{U}_{M,K}U_{M,L} + \dot{U}_{M,L}U_{M,K}$$

Aceasta, conform:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_K(\mathbf{X},t)}{\partial X_L}\right)=\frac{\partial^2 U_K(\mathbf{X},t)}{\partial t\partial X_L}=\frac{\partial}{\partial X_L}\underbrace{\left(\frac{\partial U_K(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right)}_{\dot{U}_K}=\frac{\partial \dot{U}_K}{\partial X_L}$$

$$2\ddot{E}_{KL}=\ddot{U}_{K,L}+\ddot{U}_{L,K}+\ddot{U}_{M,K}U_{M,L}+\ddot{U}_{M,L}U_{M,K}+2\dot{U}_{M,L}\dot{U}_{M,K}$$

Apoi,

$$2T_{KL}\ddot{E}_{KL}=T_{KL}\ddot{U}_{K,L}+T_{KL}\ddot{U}_{L,K}+T_{KL}\ddot{U}_{M,K}U_{M,L}+T_{KL}\ddot{U}_{M,L}U_{M,K}+\dots$$

unde termenii nescrişi nu conţin $\ddot{\mathbf{U}}$.

În membrul doi, conform $T_{KL}=T_{LK}$, primii doi termeni sunt egali, şi la fel termenii trei şi patru, rezultă:

$$T_{KL}\ddot{E}_{KL}=T_{KL}(\ddot{U}_{K,L}+\ddot{U}_{M,K}U_{M,L})+\dots$$

Tensorul de ordinul doi Piola-Kirchhoff în $OX_1X_2X_3$ este dat de

$$T_{KL}=(\frac{ds^0}{ds})\hat{\sigma}\Theta^0_K\Theta^0_L.$$

Cu aceasta, rezultă:

$$T_{KL}\ddot{E}_{KL}=\frac{ds^0}{ds}\hat{\sigma}(\ddot{U}_{K,L}\Theta^0_K\Theta^0_L+\ddot{U}_{M,K}U_{M,L}\Theta^0_K\Theta^0_L)+\dots$$

Avem:

$$\ddot{U}_{K,L}\Theta^0_L=\frac{\partial\ddot{U}_K}{\partial X_L}\frac{dX_L}{ds^0}=\frac{d\ddot{U}_K}{ds^0};\qquad \ddot{U}_{M,L}\Theta^0_L=\frac{\partial\ddot{U}_M}{\partial X_L}\frac{dX_L}{ds^0}=\frac{d\ddot{U}_M}{ds^0}$$

Rezultă:

$$T_{KL}\ddot{E}_{KL}=\frac{ds^0}{ds}\hat{\sigma}\left(\frac{d\ddot{U}_K}{ds^0}\Theta^0_K+\frac{d\ddot{U}_M}{ds^0}\frac{d\ddot{U}_M}{ds^0}\right)+\dots$$

Sau:

$$T_{KL}\ddot{E}_{KL}=\frac{ds^0}{ds}\hat{\sigma}\left(\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\mathbf{\Theta}^0+\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\right)+\dots$$

$$T_{KL}\ddot{E}_{KL}=\frac{ds^0}{ds}\hat{\sigma}\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\left(\mathbf{\Theta}^0+\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\right)+\dots=\frac{ds^0}{ds}\hat{\sigma}\frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0}\mathbf{V}+\dots$$

regăsindu-se expresia din 2.2.1.

2.3 Funcţionala J pentru cablul discretizat

Punem

$$J=J_1+J_2-J_3$$

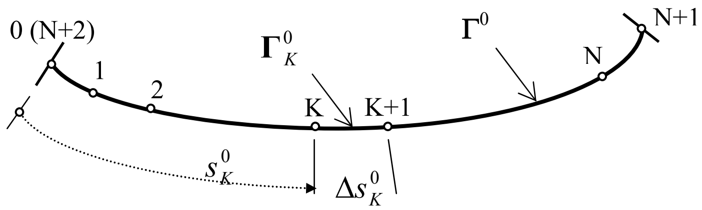
unde

$$J_1 = \int_{\Gamma^0} \overline{\rho}^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} ds^0 + \sum_l \frac{1}{2} \overline{m}_L \ddot{\mathbf{U}}_L^2$$

$$J_2 = \int_{\Gamma^0} A^0 T_{KL}^+ \ddot{E}_{KL} ds^0$$

$$J_3 = \int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}} ds^0 + \sum_J \overline{\mathbf{P}}_J \ddot{\mathbf{U}}_J$$

Reluăm discretizarea cablului – Cap.2 – în N+1 arce Γ_K^0:



S-a notat: $\Gamma_K^0 = [s_K^0, s_{K+1}^0]$, $\Delta s_K^0 = s_{K+1}^0 - s_K^0$, $K = 0, N$.

<u>Expresia J_1</u>

Integrala din J_1, devine:

$$\int_{\Gamma^0} \overline{\rho}^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} ds^0 = \sum_{K=0}^{N} \int_{\Gamma_k^0} \overline{\rho}^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} ds^0$$

Cu **U** funcție liniara de s^0 – v. Cap.2, 3.2 ,

$$\mathbf{U}(s^0) = \mathbf{U}_K + \frac{\mathbf{U}_{K+1} - \mathbf{U}_K}{\Delta s_K^0} (s - s_K^0), \quad s^0 \in \Gamma_K^0$$

avem

$$\int_{\Gamma_K^0} \ldots = \int_{s_K^0}^{s_{K+!}^0} \frac{\overline{\rho}^0}{2} \left[\ddot{\mathbf{U}}_K + \frac{\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} - \ddot{\mathbf{U}}_K}{\Delta s_K^0} (s - s_K^0) \right]^2 ds^0 =$$

$$= \frac{\overline{\rho}^0}{2} \left[\ddot{\mathbf{U}}_K{}^2 \Delta s_k^0 + 2\ddot{\mathbf{U}}_K \frac{\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} - \ddot{\mathbf{U}}_K}{\Delta s_K^0} \frac{(\Delta s_K^0)^2}{2} + \frac{(\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} - \ddot{\mathbf{U}}_K)^2}{(\Delta s_K^0)^2} \frac{(\Delta s_K^0)^3}{3} \right]$$

$$= \frac{\overline{\rho}^0}{6} \Delta s_K^0 \left[3\ddot{\mathbf{U}}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{K+1}{}^2 + \ddot{\mathbf{U}}_K{}^2 - 2\ddot{\mathbf{U}}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} \right] = \frac{\overline{\rho}^0}{6} \Delta s_K^0 \left[\ddot{\mathbf{U}}_K{}^2 + \ddot{\mathbf{U}}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{K+1}{}^2 \right]$$

Rezultă:

$$J_1 = \sum_{K=0}^{N} \frac{\overline{\rho}^0}{6} \Delta s_K^0 \left[\ddot{\mathbf{U}}_K^{\,2} + \ddot{\mathbf{U}}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} + \ddot{\mathbf{U}}_{K+1}^{\,2} \right] + \sum_L \frac{1}{2} \overline{m}_L \ddot{\mathbf{U}}_L^{\,2} \,,$$

Dacă un nod K este fix, atunci, $\ddot{\mathbf{U}}_K = \mathbf{0}$ (exemplu nodurile 0 şi N+1).

■

Integrala J_2

Avem:

$$J_2 = \int_{\Gamma^0} A^0 T_{KL}^{+} \ddot{E}_{KL} ds^0 = \int_{\Gamma^0} T\mathbf{V} \frac{d\ddot{\mathbf{U}}}{ds^0} ds^0 = \sum_{K=0}^{N} \int_{\Gamma_K^0} \ldots$$

unde $T = \dfrac{ds^0}{ds} \hat{\sigma} A^0$.

$$\int_{\Gamma_K^0} \ldots = \int_{s_K^0}^{s_{K+1}^0} T_K \mathbf{V}_K \frac{\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} - \ddot{\mathbf{U}}_K}{\Delta s_K^0} ds^0 = T_K \mathbf{V}_K (\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} - \ddot{\mathbf{U}}_K)$$

Rezultă:

$$J_2 = \sum_{K=0}^{N} T_K \mathbf{V}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} - \sum_{K=0}^{N} T_K \mathbf{V}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$

Sau, înlocuind în prima sumă indicele K cu K-1,

$$J_2 = \sum_{K=1}^{N+1} T_{K-1} \mathbf{V}_{K-1} \ddot{\mathbf{U}}_K - \sum_{K=0}^{N} T_K \mathbf{V}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$

Punând, prin convenţie, $\mathbf{V}_{-1} = \mathbf{0}$, în prima sumă indicele de sumare poate lua valori de la 0 la N+1. Analog, punând $\mathbf{V}_{N+1} = \mathbf{0}$, în ultima sumă indicele K poate ia valori de pâna la N+1. Astfel, se obţine:

$$J_2 = \sum_{K=0}^{N+1} (T_{K-1} \mathbf{V}_{K-1} - T_K \mathbf{V}_K) \ddot{\mathbf{U}}_K$$

cu convenţiile $\mathbf{V}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{V}_{N+1} = \mathbf{0}$.

■

Expresia J_3

Presupunem că $\mathbf{p}^0(s^0)$ este continuă pe Γ^0, şi este funcţie liniară pe Γ_K^0 (Cap.2, 3.2),

$$\mathbf{p}^0(s^0) = \mathbf{p}_K^0 + \frac{\mathbf{p}_{K+1}^0 - \mathbf{p}_K^0}{\Delta s_K^0} (s - s_K^0)\,; \qquad s^0 \in \Gamma_K^0 \,,$$

în care $\mathbf{p}_K^0 = \mathbf{p}^0(s_K^0)$, $\mathbf{p}_{K+1}^0 = \mathbf{p}^0(s_{K+1}^0)$.

Integrala din J_3, devine:

$$\int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}} ds^0 = \sum_{K=0}^{N} \int_{\Gamma_K^0} \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}} ds^0$$

Avem, omițând detaliile de calcul:

$$\int_{\Gamma_K^0} \ldots = \int_{s_K^0}^{s_{K+1}^0} \left[\mathbf{p}_K^0 + \frac{\mathbf{p}_{K+1}^0 - \mathbf{p}_K^0}{\Delta s_K^0}(s - s_K^0) \right] \left[\ddot{\mathbf{U}}_K + \frac{\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} - \ddot{\mathbf{U}}_K}{\Delta s_K^0}(s - s_K^0) \right] ds^0 = \ldots$$

$$= \frac{1}{6} \Delta s_K^0 \left[(2\mathbf{p}_K^0 + \mathbf{p}_{K+1}^0) \ddot{\mathbf{U}}_K + (\mathbf{p}_K^0 + 2\mathbf{p}_{K+1}^0) \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} \right]$$

$$\int_{\Gamma^0} \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}} ds^0 = \sum_{K=0}^{N} \frac{1}{6} \Delta s_K^0 (2\mathbf{p}_K^0 + \mathbf{p}_{K+1}^0) \ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_{K=0}^{N} \frac{1}{6} \Delta s_K^0 (\mathbf{p}_K^0 + 2\mathbf{p}_{K+1}^0) \ddot{\mathbf{U}}_{K+1}$$

$$= \sum_{K=0}^{N} \frac{1}{6} \Delta s_K^0 (2\mathbf{p}_K^0 + \mathbf{p}_{K+1}^0) \ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_{K=1}^{N+1} \frac{1}{6} \Delta s_{K-1}^0 (\mathbf{p}_{K-1}^0 + 2\mathbf{p}_K^0) \ddot{\mathbf{U}}_K$$

Cu convenția $\Delta s_{-1}^0 = 0$, $\Delta s_{N+1}^0 = 0$, indicele de sumare în ambele sume poate lua valori de la 0 la N+1.

Rezultă:

$$J_3 = \sum_{K=0}^{N+1} \frac{1}{6} \left[\Delta s_{K-1}^0 \mathbf{p}_{K-1}^0 + 2(\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) \mathbf{p}_K^0 + \Delta s_K^0 \mathbf{p}_{K+1}^0 \right] \ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_J \overline{\mathbf{P}}_J \ddot{\mathbf{U}}_J$$

cu convenția $\Delta s_{-1}^0 = 0$, $\Delta s_{N+1}^0 = 0$.

Sau, punând

$$\mathbf{P}_K = \frac{1}{6} \left[\Delta s_{K-1}^0 \mathbf{p}_{K-1}^0 + 2(\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) \mathbf{p}_K^0 + \Delta s_K^0 \mathbf{p}_{K+1}^0 \right] + \overline{\mathbf{P}}_K$$

unde $\overline{\mathbf{P}}_K$ este forța concentrată din nodul K (în particular, putem avea $\overline{\mathbf{P}}_K = \mathbf{0}$), rezultă:

$$J_3 = \sum_{K=0}^{N+1} \mathbf{P}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$

În J_3, $\mathbf{P}_K$ este forța echivalentă de nod, dată de expresia de mai sus.

În particular, în cazul unei încărcări <u>uniform distribuite</u> pe Γ^0, $\mathbf{p}(s^0) = \mathbf{p}^0 =$ constant, rezultă

$$\mathbf{P}_K = \frac{1}{2} (\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) \mathbf{p}^0 + \overline{\mathbf{P}}_K$$

■

3 VARIAȚIA LUI *J*. ECUAȚIILE DE MIŞCARE ŞI ECHILIBRU.

3.1 Ecuațiile de mişcare şi de echilibru

Avem

$$J = J_1 + J_2 - J_3$$

şi

$$\delta_{acc} J = \delta_{acc} J_1 + \delta_{acc} J_2 - \delta_{acc} J_3$$

Calculăm variația funcționalelor J_1, J_2, J_3. Notând, pentru moment, cu J_{11} primul termen din J_1, avem:

$$\delta_{acc} J_{11} = \sum_{K=0}^{N} \frac{\overline{\rho}^0}{6} \Delta s_K^0 \left[2\ddot{\mathbf{U}}_K \delta\ddot{\mathbf{U}}_K + \delta\ddot{\mathbf{U}}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} + \ddot{\mathbf{U}}_K \delta\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} + 2\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} \delta\ddot{\mathbf{U}}_{K+1} \right]$$
$$= \sum_{K=0}^{N} \frac{\overline{\rho}^0}{6} \Delta s_K^0 (2\ddot{\mathbf{U}}_K + \ddot{\mathbf{U}}_{K+1}) \delta\ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_{K=0}^{N} \frac{\overline{\rho}^0}{6} \Delta s_K^0 (\ddot{\mathbf{U}}_K + 2\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}) \delta\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}$$

Schimbăm în a doua sumă, indicele de sumare *K* în *K*-1, aceasta devine

$$\sum_{K=1}^{N+1} \frac{\overline{\rho}^0}{6} \Delta s_{K-1}^0 (\ddot{\mathbf{U}}_{K-1} + 2\ddot{\mathbf{U}}_K) \delta\ddot{\mathbf{U}}_K$$

Cu convenția $\Delta s_{-1}^0 = 0$, $\Delta s_{N+1}^0 = 0$, indicele de sumare în ambele sume poate lua valori de la 0 la N+1.

Rezultă:

$$\delta_{acc} J_1 = \sum_{K=0}^{N+1} \frac{\overline{\rho}^0}{6} \left[\Delta s_{K-1}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1} + 2(\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) \ddot{\mathbf{U}}_K + \Delta s_K^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} \right] \delta\ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_L \overline{m}_L \ddot{\mathbf{U}}_L \delta\ddot{\mathbf{U}}_L$$

şi

$$\delta_{acc} J_2 = \sum_{K=0}^{N+1} (T_{K-1} \mathbf{V}_{K-1} - T_K \mathbf{V}_K) \delta\ddot{\mathbf{U}}_K$$

$$\delta_{acc} J_3 = \sum_{K=0}^{N+1} \mathbf{P}_K \delta\ddot{\mathbf{U}}_K$$

În relațiile anterioare:

$$\Delta s_{-1}^0 = 0,\ \Delta s_{N+1}^0 = 0;\quad \mathbf{V}_{-1} = \mathbf{0},\ \mathbf{V}_{N+1} = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

Anulând coeficientul lui $\delta\ddot{\mathbf{U}}_K$ în $\delta_{acc} J = 0$, se obțin ecuațiile de mişcare:

$$\frac{\overline{\rho}^0}{6}\left[\Delta s^0_{K-1}\ddot{\mathbf{U}}_{K-1}+2(\Delta s^0_{K-1}+\Delta s^0_K)\ddot{\mathbf{U}}_K+\Delta s^0_K\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}\right]+\overline{m}_K\ddot{\mathbf{U}}_K$$
$$+T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1}-T_K\mathbf{V}_K-\mathbf{P}_K=\mathbf{0} \qquad \text{(I)}$$

Anulând $\ddot{\mathbf{U}}_K$ în ecuațiile anterioare, se obțin ecuațiile de echilibru:

$$T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1}-T_K\mathbf{V}_K-\mathbf{P}_K=\mathbf{0} \qquad \text{(II)}$$

Punând

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U})=T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1}-T_K\mathbf{V}_K \qquad \text{(II-a)}$$

ecuațiile de echilibru se scriu:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U})=\mathbf{P}_K \qquad \text{(II-b)}$$

În ecuațiile anterioare,

$$\mathbf{U}=\left[\ldots,U_K^1,U_K^2,U_K^3,\ldots\right]^T$$

Ecuațiile I-III, se scriu pentru $K=0,1,\ldots,N+1$, cu convențiile (*)

Dacă nodurile 0 şi N+1 sunt fixe, atunci ecuațiile se scriu pentru *nodurile libere* $K=1,\ldots,N$. În particular, în acest caz,

$$\mathbf{U}=\left[U_1^1,U_1^2,U_1^3,\ldots,U_K^1,U_K^2,U_K^3,\ldots,U_N^1,U_N^2,U_N^3,\right]^T$$

3.2 Cazul nodurilor parțial libere

Să presupunem că pentru nodul de indice S (de exemplu S = 0 sau S = N+1) avem

$U_S^2=0,\quad U_S^3=0$,

adică deplasarea nodului este fixată în direcțiile 2 şi 3, şi liberă pe direcția 1.

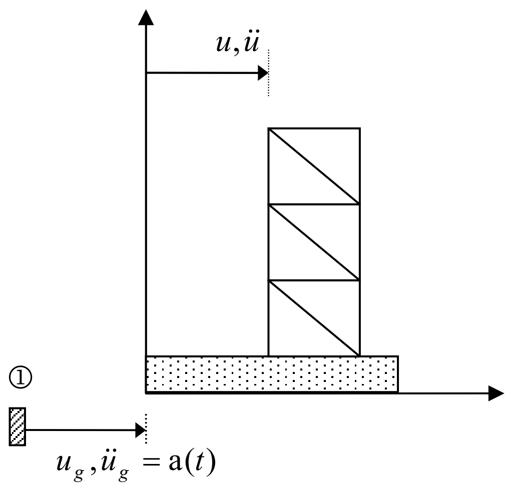
Câmpul admisibil de accelerații va satisface constrâgerile $\ddot{U}_S^M=0,\, M=2{,}3$, şi variațiile de accelerație admisibile vor satisface $\delta\ddot{U}_S^M=0,\, M=2{,}3$.

Considerăm expresia $\delta_{acc}J=0$ proiectată pe axele 1-3: pentru termenii corespunzând lui K = S, rămâne numai proiecția corespunzând direcței 1. Aşadar, în acest caz, pentru nodul S, se va genera numai ecuația după direcția 1. Pentru nodul S, vectorul **U** va conține numai coordonata 1 a deplasării nodului. De exemplu, pentru S = 0, vom avea:

$$\mathbf{U}=\left[U_0^1,U_1^1,U_1^2,U_1^3,\ldots\right]^T$$

3.3 Cazul excitației seismice

3.3.1 Funcționala *J*



Cu referire la figura de mai sus:

Accelerația relativă la baza structurii este $\ddot{u}$; accelerația bazei (accelerația de transport) este $\ddot{u}_g = \mathrm{a}(t)$. Accelerația absolută (referită la reperul fix ①), va fi dată de

$\ddot{u}_a = \ddot{u} + \mathrm{a}(t)$

Funcționala *J* pentru un cablu (2.1)

$$J = \int_{\Gamma^0} (\overline{\rho}^0 \frac{\ddot{\mathbf{U}}^2}{2} + A^0 T^+_{KL} \ddot{E}_{KL} - \mathbf{p}^0 \ddot{\mathbf{U}}) ds^0 - \sum_L \overline{\mathbf{P}}_L \ddot{\mathbf{U}}_L + \sum_K \frac{1}{2} \overline{m}_K \ddot{\mathbf{U}}^2_K$$

ia forma

$$J_1 = \int_{\Gamma^0} (\overline{\rho}^0 \frac{(\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{a})^2}{2} + A^0 T^+_{KL} \ddot{E}_{KL} - \mathbf{p}^0 (\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{a})) ds^0 - \sum_L \overline{\mathbf{P}}_L (\ddot{\mathbf{U}}_L + \mathbf{a}) + \sum_K \frac{1}{2} \overline{m}_K (\ddot{\mathbf{U}}_K + \mathbf{a})^2$$

Sau, desvoltând şi păstrând numai termenii care depind de accelerațiile $\ddot{\mathbf{U}}$,

$$J_1 = J + \underbrace{\mathbf{a} \int_{\Gamma^0} \overline{\rho}^0 \ddot{\mathbf{U}} ds^0}_{J_a} + \mathbf{a} \sum_K \overline{m}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$

în care s-a notat

$$J_a = \mathbf{a} \int_{\Gamma^0} \overline{\rho}^0 \ddot{\mathbf{U}} ds^0$$

Discretizarea

Ne referim la cablul discretizat (§2.3). Cu

$$\ddot{\mathbf{U}}(s^0)=\ddot{\mathbf{U}}_K+\frac{\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}-\ddot{\mathbf{U}}_K}{\Delta s_K^0}(s-s_K^0)$$

rezultă:

$$J_a=\mathbf{a}\sum_{K=0}^{N}\int_{\Gamma_K^0}\overline{\rho}^0\left[\ddot{\mathbf{U}}_K+\frac{\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}-\ddot{\mathbf{U}}_K}{\Delta s_K^0}(s-s_K^0)\right]ds^0=\mathbf{a}\sum_{K=0}^{N}J_K$$

S-a pus:

$$J_K=\overline{\rho}_K^0\left[\ddot{\mathbf{U}}_K\Delta s_K^0+\frac{\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}-\ddot{\mathbf{U}}_K}{2\Delta s_K^0}(s-s_K^0)^2\Big|_{s_K^0}^{s_K^0+\Delta s_K^0}\right]=\ldots$$

$$=\overline{\rho}_K^0\frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{U}}_K+\ddot{\mathbf{U}}_{K+1})\Delta s_K^0$$

Rezultă:

$$\sum_{K=0}^{N}J_K=\sum_{K=0}^{N}\frac{1}{2}\overline{\rho}_K^0\Delta s_K^0\ddot{\mathbf{U}}_K+\sum_{K=0}^{N}\frac{1}{2}\overline{\rho}_K^0\Delta s_K^0\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}$$

În a doua sumă înlocuim indicele de sumare $K+1=I,\quad K=I-1$. Ținem cont de

$\ddot{\mathbf{U}}_0=\mathbf{0},\ddot{\mathbf{U}}_{N+1}=\mathbf{0}$, rezultă

$$\sum_{K=0}^{N}J_K=\sum_{K=0}^{N+1}\frac{1}{2}\overline{\rho}_K^0\Delta s_K^0\ddot{\mathbf{U}}_K+\sum_{I=0}^{N+1}\frac{1}{2}\overline{\rho}_{I-1}^0\Delta s_{I-1}^0\ddot{\mathbf{U}}_I$$

$$=\sum_{K=0}^{N+1}\frac{1}{2}(\overline{\rho}_{K-1}^0\Delta s_{K-1}^0+\overline{\rho}_K^0\Delta s_K^0)\ddot{\mathbf{U}}_K$$

Sau,

$$\sum_{K=0}^{N+1}J_K=\sum_{K=0}^{N+1}m_K^a\ddot{\mathbf{U}}_K\ ,$$

unde

$$m_K^a=\frac{1}{2}(\overline{\rho}_{K-1}^0\Delta s_{K-1}^0+\overline{\rho}_K^0\Delta s_K^0)$$

este <u>masa echivalentă de nod din masele distribuite</u>.

Cu acestea, funcționala *J* devine

$$J_1=J+\mathbf{a}\sum_{K=0}^{N+1}(m_K^a+\overline{m}_K)\ddot{\mathbf{U}}_K$$

Reamintim că $\overline{m}_K$ notează masa concentrată în nodul *K*.

În fine, notând <u>masa echivalentă de nod</u> cu

$m_K^{ech} = m_K^a + \overline{m}_K ,$

funcționala J ia forma

$$J_1 = J + \mathbf{a}\sum_{K=0}^{N+1} m_K^{ech}\ddot{\mathbf{U}}_K$$

3.3.2 Ecuația de mişcare a nodului *K*

Avem

$$\delta_{acc} J_1 = \delta_{acc} J + \mathbf{a}\sum_{K=0}^{N+1} m_K^{ech}\delta\ddot{\mathbf{U}}_K$$

Anulând coeficientul lui $\delta\ddot{\mathbf{U}}_K$, ecuația de mişcare a nodului K este:

Membrul I din ecuația (I) - §3.1 $+ m_K^{ech}\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Sau explicit, trecând termenul $m_K^{ech}\mathbf{a}$ în membrul doi:

$$\frac{\overline{\rho}^0}{6}\left[\Delta s_{K-1}^0\ddot{\mathbf{U}}_{K-1} + 2(\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0)\ddot{\mathbf{U}}_K + \Delta s_K^0\ddot{\mathbf{U}}_{K+1}\right] + \overline{m}_K\ddot{\mathbf{U}}_K$$
$$+ T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1} - T_K\mathbf{V}_K = \mathbf{P}_K - m_K^{ech}\mathbf{a}$$

Concluzie:

În cazul excitației prin accelerație aplicată suportului, ecuația de mişcare a nodului K este ecuația I-§3.1, în care în membrul doi, $\mathbf{P}_K$ se înlocuieşte cu

$\mathbf{P}_K - m_K^{ech}\mathbf{a}$.

■

4 MATRICEA DE RIGIDITATE TANGENTĂ

4.1 Matricea de rigiditate tangentă

Fie ecuațiile de echilibru (III):

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) - \mathbf{P}_K = \mathbf{0}, \qquad K = 1,2,\ldots,N$$

unde, conform (III-a),

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1} - T_K\mathbf{V}_K$$

Ecuațiile de echilibru se pot scrie

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

în care:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_1^2 \\ f_1^3 \\ \hline . \\ . \\ . \\ \hline f_N^1 \\ f_N^2 \\ f_N^3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_1^3 \\ \hline . \\ . \\ . \\ \hline P_N^1 \\ P_N^2 \\ P_N^3 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \\ \hline . \\ . \\ . \\ \hline U_N^1 \\ U_N^2 \\ U_N^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \hline . \\ . \\ . \\ \hline . \\ . \\ U_n \end{bmatrix}$$

Observație

În practică, coordonatele vectorului **U** se vor nota cu indici consecutivi, 1,2, ..., *n*, unde $n = 3N$. O funcție va da legătura intre indicii coordonatelor U_K^L, $K = \overline{1,N}$, $L = \overline{1,3}$ şi U_j, $j = \overline{1,n}$ ■

Ecuația (1) se rezolvă prin metoda Newton, prin schema de iterare

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{U}^{(i)})\Delta\mathbf{U}^{(i+1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{U}^{(i)}) \\ \mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta\mathbf{U}^{(i+1)} \end{cases} \tag{2}$$

şi $\mathbf{U}^{(0)} = dat$.

În aceste expresii:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \left[\frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^L}\right]$$

este jacobianul lui **f**, numit <u>matricea de rigiditate tangentă</u>; *i* este indicele iterației.

Explicit,

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^1}{\partial U_1^1} & \frac{\partial f_1^1}{\partial U_1^2} & \frac{\partial f_1^1}{\partial U_1^3} & \cdots & \frac{\partial f_1^1}{\partial U_N^3} \\ \frac{\partial f_1^2}{\partial U_1^2} & \frac{\partial f_1^2}{\partial U_1^2} & \frac{\partial f_1^2}{\partial U_1^2} & \cdots & \frac{\partial f_1^2}{\partial U_N^3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_N^3}{\partial U_1^1} & \frac{\partial f_N^3}{\partial U_1^2} & \frac{\partial f_N^3}{\partial U_{13}^3} & \cdots & \frac{\partial f_N^3}{\partial U_N^3} \end{bmatrix}$$

Ținând cont de expresiile lui $\mathbf{V}_K$ şi T_K – Cap. 2, §3.2 – şi anume:

$$\mathbf{V}_K = \frac{\mathbf{U}_{K+1} - \mathbf{U}_K}{\Delta s_K^0} + \boldsymbol{\theta}^0$$

$$T_K = \frac{T_K^0 - \lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0}{|\,\mathbf{V}_K\,|} + \lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0$$

rezultă că $\mathbf{f}_K$ depinde numai de $\mathbf{U}_{K-1}, \mathbf{U}_K$ şi $\mathbf{U}_{K+1}$. Explicit:

$$\mathbf{f}_K = \mathbf{f}_K(U^1_{K-1}, U^2_{K-1}, U^3_{K-1};\ U^1_K, U^2_K, U^3_K;\ U^1_{K+1}, U^2_{K+1}, U^3_{K+1})$$

Astfel, rezultă:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U^L_J} = \mathbf{0} \qquad \text{... pentru } J \neq K-1, K, K+1$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U^L_J} = \frac{\partial}{\partial U^L_J}(T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1} - T_K \mathbf{V}_K) \qquad \text{... } J = K-1, K, K+1$$

■

Calculul derivatelor parţiale

Avem:

$$\frac{\partial T_K}{\partial U^L_{K-1}} = 0$$

$$\frac{\partial T_K}{\partial U^L_K} = \frac{\lambda_K A^0_K Y^0_K - T^0_K}{|\mathbf{V}_K|} \cdot \frac{\partial |\mathbf{V}_K|}{\partial U^L_K}$$

$$\frac{\partial T_K}{\partial U^L_{K+1}} = \frac{\lambda_K A^0_K Y^0_K - T^0_K}{|\mathbf{V}_K|} \cdot \frac{\partial |\mathbf{V}_K|}{\partial U^L_{K+1}}$$

Deducem o formula auxiliară. Avem:

$$|\mathbf{V}|^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V},$$

$$|\mathbf{V}| \frac{\partial |\mathbf{V}|}{\partial U} = \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial U},$$

$$\frac{\partial |\mathbf{V}|}{\partial U} = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial U}$$

Pentru a calcula derivatele lui $|\mathbf{V}_K|$, ţinem cont de formula de mai sus.

Considerăm $\mathbf{V}_K$ în baza $\{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\}$ a coordonatelor $X_{1,} X_{2,} X_3$:

$$\mathbf{V}_K = \left[\frac{1}{\Delta s^0_K}(U^L_{K+1} - U^L_K) + \theta^{0L}_K \right] \mathbf{I}_L$$

Avem:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_K}{\partial U^L_K} = -\frac{1}{\Delta s^0_K} \mathbf{I}_L$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_K}{\partial U^L_{K+1}} = \frac{1}{\Delta s^0_K} \mathbf{I}_L$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_K}{\partial U_K^L} = \mathbf{0} \qquad \text{... pentru } J \neq K, K+1$$

Rezultă:

$$\frac{\partial |\mathbf{V}_K|}{\partial U_K^L} = \frac{1}{|\mathbf{V}_K|}\mathbf{V}_K \frac{-1}{\Delta s_K^0}\mathbf{I}_L = \frac{-V_K^L}{\Delta s_K^0 |\mathbf{V}_K|}$$

$$\frac{\partial |\mathbf{V}_K|}{\partial U_{K+1}^L} = \frac{1}{|\mathbf{V}_K|}\mathbf{V}_K \frac{1}{\Delta s_K^0}\mathbf{I}_L = \frac{V_K^L}{\Delta s_K^0 |\mathbf{V}_K|}$$

Rezultă astfel:

$$\frac{\partial T_K}{\partial U_{K-1}^L} = 0$$

$$\frac{\partial T_K}{\partial U_K^L} = -a_K^L$$

$$\frac{\partial T_K}{\partial U_{K+1}^L} = a_K^L$$

unde

$$a_K^L = \frac{\lambda_K A_K^0 Y_K^0 - T_K^0}{\Delta s_K^0} \cdot \frac{V_K^L}{|\mathbf{V}_K|^3}, \quad L = 1,2,3$$

Analog:

$$\frac{\partial T_{K-1}}{\partial U_{K-1}^L} = -a_{K-1}^L$$

$$\frac{\partial T_{K-1}}{\partial U_K^L} = a_{K-1}^L$$

$$\frac{\partial T_{K-1}}{\partial U_{K+1}^L} = 0$$

Rezultă:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_{K-1}^L} = \frac{\partial}{\partial U_{K-1}^L}(T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1}) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial U_{K-1}^L}(-T_K \mathbf{V}_K)}_{0}$$

$$= -a_{K-1}^L \mathbf{V}_{K-1} - T_{K-1}\frac{1}{\Delta s_{K-1}^0}\mathbf{I}_L$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_K^L} = \frac{\partial T_{K-1}}{\partial U_K^L}\mathbf{V}_{K-1} + T_{K-1}\frac{\partial \mathbf{V}_{K-1}}{\partial U_K^L} - \frac{\partial T_K}{\partial U_K^L}\mathbf{V}_K - T_K\frac{\partial \mathbf{V}_K}{\partial U_K^L}$$

$$= a_{K-1}^L\mathbf{V}_{K-1} + T_{K-1}\frac{1}{\Delta s_{K-1}^0}\mathbf{I}_L - (-a_K^L)\mathbf{V}_K - T_K\frac{-1}{\Delta s_K^0}\mathbf{I}_L$$

$$= a_{K-1}^L\mathbf{V}_{K-1} + a_K^L\mathbf{V}_K + \left(\frac{T_{K-1}}{\Delta s_{K-1}^0} + \frac{T_K}{\Delta s_K^0}\right)\mathbf{I}_L$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_{K+1}^L} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial U_{K+1}^L}(T_{K-1}\mathbf{V}_{K-1})}_{0} + \frac{\partial}{\partial U_{K+1}^L}(-T_K\mathbf{V}_K)$$

$$= -a_K^L\mathbf{V}_K - T_K\frac{1}{\Delta s_K^0}\mathbf{I}_L$$

Rezultatele anterioare dau:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_{K-1}^L} = -\mathbf{A}_{K-1}^L$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_K^L} = \mathbf{A}_{K-1}^L + \mathbf{A}_K^L$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_{K+1}^L} = -\mathbf{A}_K^L$$

unde

$$\mathbf{A}_K^L = \frac{T_K}{\Delta s_K^0}\mathbf{I}_L + a_K^L\mathbf{V}_K$$

Coordonatele vectorului $\mathbf{A}_K^L$ ($L = 1,2,3$), în baza $\{\mathbf{I}_M\}$ sunt

$$A_K^{LM} = \frac{T_K}{\Delta s_K^0}\delta^{LM} + a_K^L V_K^M, \qquad M = 1,2,3$$

sau:

$$A_K^{LM} = \frac{T_K}{\Delta s_K^0}\delta^{LM} + \frac{\lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0 - T_K^0}{\Delta s_K^0}\cdot\frac{V_K^L V_K^M}{|\mathbf{V}_K|^3}$$

Observați că avem

$$A_K^{LM} = A_K^{ML}$$

■

<u>Altă expresie pentru A_K^{LM}</u>

Avem următoarea identitate: din expresia lui T_K rezultă

$$\frac{\lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0 - T_K^0}{|\mathbf{V}_K|} = \lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0 - T_K$$

Cu aceasta, avem:

$$A_K^{LM} = \left[T_K \delta^{LM} + (\lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0 - T_K) \frac{V_K^L V_K^M}{|\mathbf{V}_K|^2} \right] \frac{1}{\Delta s_K^0}$$

În particular, programul NELSAS utilizează aceasta expresie ■

Cu cele de mai sus rezultă:

$$\frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K-1}^L} = -A_{K-1}^{LM}$$

$$\frac{\partial f_K^M}{\partial U_K^L} = A_{K-1}^{LM} + A_K^{LM}$$

$$\frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K+1}^L} = -A_K^{LM}$$

şi

$$\frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^L} = 0, \qquad \text{pentru } J \neq K-1, K, K+1$$

■

4.2 Structura ecuaţiilor liniartizate

Să introducem matricea derivatelor parţiale ale funcţiei $\mathbf{f}_K$ în raport cu

$\mathbf{U}_J = \{U_J^1, U_J^2, U_J^3\}$, $J = K-1, K, K+1$:

$$\mathbf{f}_{K;J} = \left[\frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^L} \right]_{\substack{M=1,2,3 \\ L=1,2,3}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_K^1}{\partial U_J^1} & \frac{\partial f_K^1}{\partial U_J^2} & \frac{\partial f_K^1}{\partial U_J^3} \\ \frac{\partial f_K^2}{\partial U_J^1} & \frac{\partial f_K^2}{\partial U_J^2} & \frac{\partial f_K^2}{\partial U_J^3} \\ \frac{\partial f_K^3}{\partial U_J^1} & \frac{\partial f_K^3}{\partial U_J^2} & \frac{\partial f_K^3}{\partial U_J^3} \end{bmatrix}, \qquad K = 1, 2, \ldots, N$$

(M = indice de linie şi L = indice de coloană)

Cu aceasta, ecuaţiile liniarizate (2) se scriu – suprimând pentru convenienţă, argumentele şi indicii superiori:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1;1} & \mathbf{f}_{1;2} & \dots & \mathbf{f}_{1;N} \\ \mathbf{f}_{2;1} & \mathbf{f}_{2;2} & \dots & \mathbf{f}_{2;N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{f}_{\#;1} & \mathbf{f}_{\#;2} & \dots & \mathbf{f}_{\#;N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_1 \\ \Delta\mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{U}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 - \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{P}_2 - \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N - \mathbf{f}_N \end{bmatrix}$$

unde

$$\Delta\mathbf{U}_J = \begin{bmatrix} \Delta U_J^1 \\ \Delta U_J^2 \\ \Delta U_J^3 \end{bmatrix}, \qquad J = 1, N$$

Ținând cont de

$$\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_J^L} = \mathbf{0} \qquad \text{pentru } J \neq K-1, K, K+1,$$

rezultă

$$\mathbf{f}_{K;J} = \mathbf{0}, \qquad J \neq K-1, K, K+1.$$

Astfel, structura ecuațiilor (2) este:

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & \mathbf{f}_{K;K-1} & \mathbf{f}_{K;K} & \mathbf{f}_{K;K+1} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{U}_{K-1} \\ \Delta\mathbf{U}_K \\ \Delta\mathbf{U}_{K+1} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sau, ecuațiile (2) iau forma:

$$\left[\mathbf{f}_{K;K-1} \;\vdots\; \mathbf{f}_{K;K} \;\vdots\; \mathbf{f}_{K;K+1} \right] \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_{K-1} \\ \hdashline \Delta\mathbf{U}_K \\ \hdashline \Delta\mathbf{U}_{K+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K\,; \qquad K = 1,2,\dots,N \tag{3}$$

Cu expresiile derivatelor parțiale din 4.1, de exemplu pentru $J = K-1$, prima linie ($M = 1$) a matricii $\mathbf{f}_{K,K-1}$ este:

$$\frac{\partial f_K^1}{\partial U_{K-1}^1} = -A_{K-1}^{11}, \quad \frac{\partial f_K^1}{\partial U_{K-1}^2} = -A_{K-1}^{21}, \quad \frac{\partial f_K^1}{\partial U_{K-1}^3} = -A_{K-1}^{31}$$

şi astfel,

$$\mathbf{f}_{K;K-1} = \left[\frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K-1}^L} \right]_{\substack{M=1,2,3 \\ L=1,2,3}} = \left[-A_{K-1}^{LM} \right]_{\substack{M=1,2,3 \\ L=1,2,3}} = \begin{bmatrix} -A_{K-1}^{11} & -A_{K-1}^{21} & -A_{K-1}^{31} \\ -A_{K-1}^{12} & -A_{K-1}^{22} & -A_{K-1}^{32} \\ -A_{K-1}^{13} & -A_{K-1}^{23} & -A_{K-1}^{33} \end{bmatrix}$$

Introducând matricea

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} A_K^{11} & A_K^{12} & A_K^{13} \\ A_K^{21} & A_K^{22} & A_K^{23} \\ A_K^{31} & A_K^{32} & A_K^{33} \end{bmatrix} = [A_K^{ML}]_{\substack{M=1,3 \\ L=1,3}}$$

(*M* indice de linie şi *L* indice de coloană), rezultă:

$$\mathbf{f}_{K;K-1} = -\mathbf{A}_{K-1}^T,$$

şi analog,

$$\mathbf{f}_{K;K} = \mathbf{A}_{K-1}^T + \mathbf{A}_K^T$$

$$\mathbf{f}_{K;K+1} = -\mathbf{A}_K^T$$

unde indicele superior *T* desemnează transpusa.

Cu cele de mai sus, ecuațiile (3) iau forma:

$$\left[-\mathbf{A}_{K-1}^T \;\vdots\; \mathbf{A}_{K-1}^T + \mathbf{A}_K^T \;\vdots\; -\mathbf{A}_K^T\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_{K-1} \\ \hline \Delta\mathbf{U}_K \\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K$$

Reamintim acum că $A_K^{LM} = A_K^{ML}$, deci $\mathbf{A}_K^T = \mathbf{A}_K$.

Cu aceasta, ecuația nodului *K* ia forma finală

$$\left[-\mathbf{A}_{K-1} \;\vdots\; \mathbf{A}_{K-1} + \mathbf{A}_K \;\vdots\; -\mathbf{A}_K\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_{K-1} \\ \hline \Delta\mathbf{U}_K \\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K$$

unde:

$$A_K^{ML} = \left[T_K \delta^{ML} + (\lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0 - T_K) \frac{V_K^M V_K^L}{|\mathbf{V}_K|^2} \right] \frac{1}{\Delta s_K^0}$$

Ecuațiile anterioare se scriu pentru fiecare nod (liber) *K* al cablului.

■

Observație asupra liniarizării ecuațiilor

Ecuațiile neliniare de echilibru ale nodului *K* (unde $K = 1,2,\ldots,N$), sunt:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}_{K-1}, \mathbf{U}_K, \mathbf{U}_{K+1}) - \mathbf{P}_K = \mathbf{0}$$

Schema de iterare (2) revine la desvoltarea în serie a membrului întâi, în jurul configurației curente $\Gamma^{(i)}$, până la termenul de ordinul întâi în ΔU_J^L:

$$\mathbf{f}_K = \mathbf{f}_K\big|_{\Gamma^{(i)}} + \sum_{J,L} \frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_J^L}\bigg|_{\Gamma^{(i)}} \Delta U_J^L + \ldots$$

în care $J = K-1, K, K+1$, $L = 1,2,3$, iar $\Delta U_J^L = U_J^L - U_J^{L(i)}$.

Matricea de rigiditate tangentă este matricea coeficienților termenului de ordinul întâi în ΔU_J^L.

Inlocuind in membrul I, neglijând termenii de ordin superior, şi suprimând pentru convenienţă indicele $\Gamma^{(i)}$, obținem:

$$\sum_{J,L} \frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_J^L} \Delta U_J^L = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K(\ldots)$$

Explicitând suma din membrul I după indicele L ($L = 1,2,3$), avem:

$$\sum_J \left(\frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_J^1} \Delta U_J^1 + \frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_J^2} \Delta U_J^2 + \frac{\partial \mathbf{f}_K}{\partial U_J^3} \Delta U_J^3\right) = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K(\ldots)$$

Proiectând pe axele $M = 1,2,3$, se obține:

$$\sum_J \left(\frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^1} \Delta U_J^1 + \frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^2} \Delta U_J^2 + \frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^3} \Delta U_J^3\right) = P_k^M - f_K^M(\ldots)$$

care se mai scrie

$$\sum_J \begin{bmatrix} \frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^1} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^2} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_J^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_J^1 \\ \Delta U_J^2 \\ \Delta U_J^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_K^M - f_K^M \end{bmatrix}; \qquad J = K-1, K, K+1;\ M = 1,2,3$$

Explicitând acum suma din membrul I ($J = K+1$, K, $K+1$), avem:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K-1}^1} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K-1}^2} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K-1}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{K-1}^1 \\ \Delta U_{K-1}^2 \\ \Delta U_{K-1}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_K^M}{\partial U_K^1} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_K^2} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_K^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_K^1 \\ \Delta U_K^2 \\ \Delta U_K^3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K+1}^1} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K+1}^2} & \frac{\partial f_K^M}{\partial U_{K+1}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{K+1}^1 \\ \Delta U_{K+1}^2 \\ \Delta U_{K+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_K^M - f_K^M \end{bmatrix}$$

Sau, cu expresiile din 4.1 ale derivatelor, avem:

$$\begin{bmatrix} -A_{K-1}^{1M} & -A_{K-1}^{2M} & -A_{K-1}^{3M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{K-1}^1 \\ \Delta U_{K-1}^2 \\ \Delta U_{K-1}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A_{K-1}^{1M} + A_K^{1M}) & (A_{K-1}^{2M} + A_K^{2M}) & (A_{K-1}^{3M} + A_K^{3M}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_K^1 \\ \Delta U_K^2 \\ \Delta U_K^3 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -A_K^{1M} & -A_K^{2M} & -A_K^{3M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_{K+1}^1 \\ \Delta U_{K+1}^2 \\ \Delta U_{K+1}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_K^M - f_K^M \end{bmatrix}$$

Introducem, ca înainte, matricile

$$\Delta\mathbf{U}_J = \begin{bmatrix} \Delta U_J^1 \\ \Delta U_J^2 \\ \Delta U_J^3 \end{bmatrix}, \qquad J = K-1, K, K+1,$$

şi

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} A_K^{11} & A_K^{12} & A_K^{13} \\ A_K^{21} & A_K^{22} & A_K^{23} \\ A_K^{31} & A_K^{32} & A_K^{33} \end{bmatrix} = [A_K^{ML}]_{\substack{M=1,3 \\ L=1,3}}$$

(M indice de linie şi L indice de coloană)

Considerând ecuaţiile anterioare pentru $M = 1,2,3$, regăsim ecuaţiile nodului K:

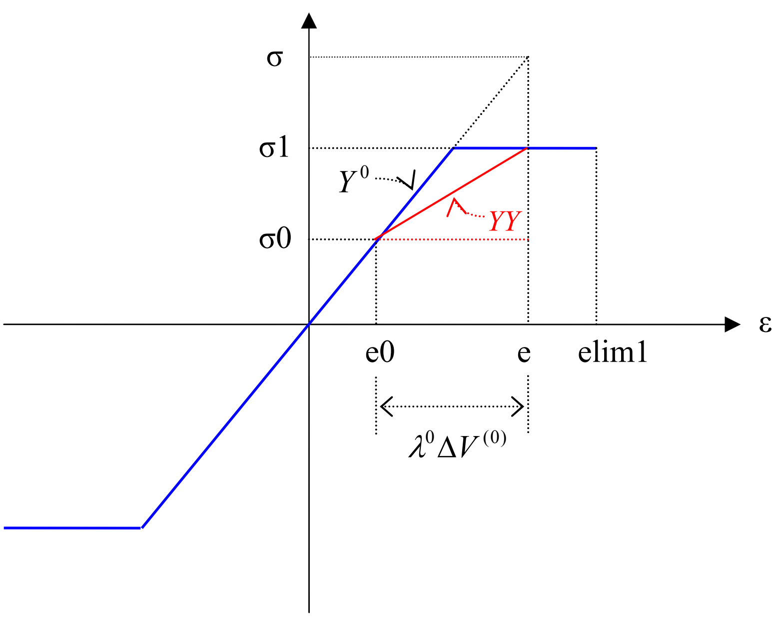
$$\left[-\mathbf{A}_{K-1}^T \;\middle|\; \mathbf{A}_{K-1}^T + \mathbf{A}_K^T \;\middle|\; -\mathbf{A}_K^T\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_{K-1} \\ \hline \Delta\mathbf{U}_K \\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K$$

Sau, cu $A_K^{LM} = A_K^{ML}$, $\mathbf{A}_K^T = \mathbf{A}_K$, regăsim forma finală a ecuaţiilor nodului K:

$$\left[-\mathbf{A}_{K-1} \;\middle|\; \mathbf{A}_{K-1} + \mathbf{A}_K \;\middle|\; -\mathbf{A}_K\right] \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_{K-1} \\ \hline \Delta\mathbf{U}_K \\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K+1} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K$$

■

4.3 Calculul în domeniul plastic – în programul NELSAS



În iterații, se lucrează cu modulul de elasticitate Y^0, acceptându-se depășirea lui $\sigma 1$ - întrucât o corecție următoare ar putea face $\sigma < \sigma 1$.

La ieșirea din iterații se verifică dacă există elemente pentru care $\sigma > \sigma 1$ și $e < elim1$.

Dacă există, se pune $\sigma = \sigma 1$ și elementul se marchează – printr-un cod – ca intrat in zona plastică.

Dacă *LNIP* ≠ 0, se inițiază iterațiile în domeniul plastic, în care se lucrează cu modulul de elasticitate secant *YY*. Vezi Figura de mai sus.

În acest caz, matricea de rigiditate tangentă trebuie modificată, întrucât *YY* devine funcție de **U**. Calculul se reia (cu punctul de referință $(\sigma 0, \varepsilon 0)$).

Avem:

$$YY = \frac{\sigma 1 - \sigma 0}{e - e0}, \qquad e - e0 = \lambda^0 \Delta V^{(0)}, \qquad \Delta V^{(0)} = |\mathbf{V}| - |\mathbf{V}^{(0)}| = |\mathbf{V}| - 1$$

Mai general, pentru referință la $\Gamma^{(r)}$, înlocuim $\sigma 0, e0$, și $\mathbf{V}^{(0)}$, respectiv cu $\sigma^{(r)}, e^{(r)}$, și $\mathbf{V}^{(r)}$. Cu referință la $\Gamma^{(0)}$, avem:

$$YY = \frac{\sigma 1 - \sigma 0}{|\mathbf{V}| - 1}$$

In plastic, avem:

$$T_K = \frac{A_K^0 \sigma 1}{|\mathbf{V}_K|}$$

Observație

Aceasta rezultă și din expresia generală a lui T_K (4.1), în care înlocuim Y_K^0 cu *YY*:

$$T_K = \frac{T_K^0 - \lambda_K^0 Y_K^0 A_K^0}{|\mathbf{V}_K|} + \lambda_K^0 Y_K^0 A_K^0 = \frac{T_K^0}{|\mathbf{V}_K|} + \lambda_K^0 Y_K^0 A_K^0 \frac{|\mathbf{V}_K| - 1}{|\mathbf{V}_K|}$$

$$T_K = \frac{T_K^0}{|\mathbf{V}_K|} + A_K^0 \frac{\sigma 1 - \sigma 0}{|\mathbf{V}_K|} = \frac{A_K^0 \sigma 1}{|\mathbf{V}_K|} \quad \blacksquare$$

Cu expresia de mai sus a lui T_K, rezultă:

$$\frac{\partial T_K}{\partial U_K^L} = A_K^0 \sigma 1 \frac{\partial}{\partial U_K^L}\left(\frac{1}{|\mathbf{V}_K|}\right) = A_K^0 \sigma 1 \frac{-1}{|\mathbf{V}_K|^2} \frac{\partial |\mathbf{V}_K|}{\partial U_K^L}$$

Sau, cu expresia ultimei derivate (v. 4.1), rezultă:

$$\frac{\partial T_K}{\partial U_K^L} = \frac{A_K^0 \sigma 1}{\Delta s_K^0} \frac{V_K^L}{|\mathbf{V}_K|^3} = \frac{T_K}{\Delta s_K^0} \frac{V_K^L}{|\mathbf{V}_K|^2}$$

Cu aceleași notații ca în elastic, avem

$$\frac{\partial T_K}{\partial U_K^L} = -a_K^L \,, \quad \frac{\partial T_K}{\partial U_{K+1}^L} = a_K^L \,,$$

unde:

$$a_K^L = -\frac{T_K}{\Delta s_K^0} \frac{V_K^L}{|\,\mathbf{V}_K\,|^2}$$

Cu

$$\mathbf{A}_K^L = \frac{T_K}{\Delta s_K^0} \mathbf{I}_L + a_K^L \mathbf{V}_K \,, \qquad A_K^{LM} = \frac{T_K}{\Delta s_K^0} \delta^{LM} + a_K^L V_K^M \,,$$

rezultă

$$A_K^{LM} = \frac{T_K}{\Delta s_K^0} \delta^{LM} - \frac{T_K}{\Delta s_K^0} \frac{V_K^L V_K^M}{|\,\mathbf{V}_K\,|^2} \,.$$

Sau:

$$A_K^{LM} = \frac{T_K}{\Delta s_K^0} \left(\delta^{LM} - \frac{V_K^L V_K^M}{|\,\mathbf{V}_K\,|^2} \right)$$

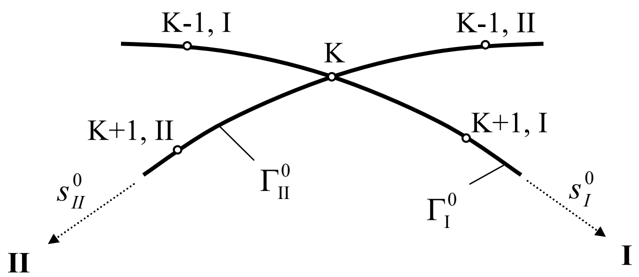
Această expresie se aplică pentru un element care a intrat în domeniul plastic. Pentru celelalte elemente, se aplică expresia generală din 4.1. Iterațiile continuă cu această expresie a matricii de rigiditate, la fiecare iterație actualizându-se modulul *YY*, pentru elementele care au intrat în plastic.

■

5 CAZUL REȚELEI

5.1 Funcționala J

Presupunem că în nodul *K*, vin cabluri pe două drumuri orientate I şi II – v. Figura de mai jos.



Funcţionala *J* va fi, pentru reţea,

$$J = J_1 + J_2 - J_3$$

unde

$$J_i = \int_{\Gamma_I^0} (\ldots) ds_I^0 + \int_{\Gamma_{II}^0} (\ldots) ds_{II}^0 = \sum_{\substack{K=0 \\ (I)}}^{N_I} \ldots + \sum_{\substack{K=0 \\ (II)}}^{N_{II}} \ldots$$

Pentru simplificare, în J_i nu s-au mai scris termenii corespunzători maselor şi forţelor concentrate.

Explicit,

$$J_1 = \sum_{K=0}^{N_I} \frac{\overline{\rho}_I^0}{6} \Delta s_{K,I}^0 \left[\ddot{\mathbf{U}}_K^{\,2} + \ddot{\mathbf{U}}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,I} + \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,I}^{\,2} \right]$$
$$+ \sum_{K=0}^{N_{II}} \frac{\overline{\rho}_{II}^0}{6} \Delta s_{K,II}^0 \left[\ddot{\mathbf{U}}_K^{\,2} + \ddot{\mathbf{U}}_K \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,II} + \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,II}^{\,2} \right] + \sum_L \frac{1}{2} \overline{m}_L \ddot{\mathbf{U}}_L^{\,2}$$

$$J_2 = \sum_{K=0}^{N_I+1} (T_{K-1,I} \mathbf{V}_{K-1,I} - T_{K,I} \mathbf{V}_{K,I}) \ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_{K=0}^{N_{II}+1} (T_{K-1,II} \mathbf{V}_{K-1,II} - T_{K,II} \mathbf{V}_{K,II}) \ddot{\mathbf{U}}_K$$

$$J_3 = \sum_{K=0}^{N_I+1} \mathbf{P}_{K,I} \ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_{K=0}^{N_{II}+1} \mathbf{P}_{K,II} \ddot{\mathbf{U}}_K \ ,$$

în care $\mathbf{P}_{K,J}$ $(J = 1,2)$ este dat de expresia din 4.2.

Expresiile anterioare se generalizează în mod natural, dacă în nodul *K* vin cabluri pe mai multe drumuri orientate.

5.2 Ecuaţii de mişcare

Dacă în nodul *K* vin cabluri pe două drumuri orientate I şi II, ecuaţiile de mişcare ale nodului iau forma:

$$\frac{\overline{\rho}_I^0}{6} \left[\Delta s_{K-1,I}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,I} + 2(\Delta s_{K-1,I}^0 + \Delta s_{K,I}^0) \ddot{\mathbf{U}}_K + \Delta s_{K,I}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,I} \right]$$
$$+ \frac{\overline{\rho}_{II}^0}{6} \left[\Delta s_{K-1,II}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,II} + 2(\Delta s_{K-1,II}^0 + \Delta s_{K,II}^0) \ddot{\mathbf{U}}_K + \Delta s_{K,II}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,II} \right] + \overline{m}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$
$$+ (T_{K-1,I} \mathbf{V}_{K-1,I} - T_{K,I} \mathbf{V}_{K,I}) + (T_{K-1,II} \mathbf{V}_{K-1,II} - T_{K,II} \mathbf{V}_{K,II})$$
$$- \mathbf{P}_{K,I} - \mathbf{P}_{K,II} = \mathbf{0}$$

În general, pentru un număr de drumuri orientate incidente în nodul *K*, ecuaţiile de mişcare ale nodului vor fi:

$$\sum_J \frac{\overline{\rho}_J^0}{6}\left[\Delta s_{K-1,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,J} + 2(\Delta s_{K-1,J}^0 + \Delta s_{K,J}^0)\ddot{\mathbf{U}}_K + \Delta s_{K,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,J}\right] + \overline{m}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$
$$+ \sum_J (T_{K-1,J}\mathbf{V}_{K-1,J} - T_{K,J}\mathbf{V}_{K,J})$$
$$- \sum_J \mathbf{P}_{K,J} = \mathbf{0}$$

Sumele se fac da la $J = 1$, la $J =$ *Numărul drumurilor incidente în nodul K.*

Sau:

$$\sum_J \frac{\overline{\rho}_J^0}{6}\Delta s_{K-1,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,J} + \left(\sum_J \frac{\overline{\rho}_J^0}{6} 2(\Delta s_{K-1,J}^0 + \Delta s_{K,J}^0)\right)\ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_J \frac{\overline{\rho}_J^0}{6}\Delta s_{K+1,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,J} + \overline{m}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$
$$+ \sum_J (T_{K-1,J}\mathbf{V}_{K-1,J} - T_{K,J}\mathbf{V}_{K,J})$$ Î
$$- \sum_J \mathbf{P}_{K,J} = \mathbf{0}$$

În particular, dacă $\overline{\rho}_J^0 = \overline{\rho}^0$ (acelaşi pe toate drumurile *J*), şi punând

$$\mathbf{P}_K = \sum_J \mathbf{P}_{k,J} \ ,$$

ecuațiile de mişcare iau forma

$$\frac{\overline{\rho}^0}{6}\left[\sum_J \Delta s_{K-1,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,J} + \left(\sum_J 2(\Delta s_{K-1,J}^0 + \Delta s_{K,J}^0)\right)\ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_J \Delta s_{K+1,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,J}\right] + \overline{m}_K \ddot{\mathbf{U}}_K$$
$$+ \sum_J (T_{K-1,J}\mathbf{V}_{K-1,J} - T_{K,J}\mathbf{V}_{K,J})$$
$$- \mathbf{P}_K = \mathbf{0}$$

5.3 Ecuații de echilibru

Ecuațiile de echilibru ale nodului *K* vor fi:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) - \mathbf{P}_K = \mathbf{0},$$

în care:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = \sum_J (T_{K-1,J}\mathbf{V}_{K-1,J} - T_{K,J}\mathbf{V}_{K,J}); \qquad \mathbf{P}_K = \sum_J \mathbf{P}_{k,J} \ .$$

Explicit, în cazul a două drumuri incidente in nodul *K*:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = (T_{K-1,I}\mathbf{V}_{K-1,I} - T_{K,I}\mathbf{V}_{K,I}) + (T_{K-1,II}\mathbf{V}_{K-1,II} - T_{K,II}\mathbf{V}_{K,II})$$

$$\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_{K,I} + \mathbf{P}_{K,II}$$

Astfel, ecuațiile au structura

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}_{K-1,I}, \mathbf{U}_{K-1,II}, \mathbf{U}_K, \mathbf{U}_{K+1,I}, \mathbf{U}_{K+1,II}) - \mathbf{P}_K = \mathbf{0}.$$

Ecuațiile

$\mathbf{A}(\mathbf{U}^{(i)})\Delta\mathbf{U}^{(i+1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{U}^{(i)})$

vor avea structura

$$\left[-\mathbf{A}_{K-1}^{I} \;\vdots\; -\mathbf{A}_{K-1}^{II} \;\vdots\; \mathbf{A}_{K-1}^{I}+\mathbf{A}_{K-1}^{II}+\mathbf{A}_{K}^{I}+\mathbf{A}_{K}^{II} \;\vdots\; -\mathbf{A}_{K}^{I} \;\vdots\; -\mathbf{A}_{K}^{II}\right]\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{U}_{K-1,I}\\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K-1,II}\\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K}\\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K+1,I}\\ \hline \Delta\mathbf{U}_{K+1,II}\end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K$$

Ecuațiile şi structura lor, se generalizează în mod natural, dacă în nodul K vin cabluri pe mai mult decât două drumuri orientate.

Observație

Pentru deducerea structurii ecuațiilor, nodurile conectate cu K pe drumul J, au fost notate $K-1,J$ şi $K+1,J$. Practic, nodurile se notează continuativ. Expresiile A_K^{LM} sunt cele anterioare, şi se vor referi la oricare segemente de cablu $(K-1,K)$ sau $(K,K+1)$, incidente pe un drum în nodul K ■