Capitolul 6

DETERMINAREA PULSAŢIILOR PROPRII ŞI A FORMELOR PROPRII DE VIBRAŢIE

1 CONSIDERAŢII GENERALE

1.1 Rapel pentru sistemul cu un grad de libertate

Ecuaţia vibraţiilor libere ale unui sistem cu un grad de libertate (în jurul poziţiei de echilibru a sistemului), este:

$$m\ddot{u} + ku = 0, \qquad (1\text{-}1)$$

în care *m* este masa, iar *k* constanta elastică (sau rigiditatea); *u* este deplasarea referită la poziţia de echilibru.

Se caută soluţii de forma $u = ae^{\pm i\omega t}$. Cu $\dot{u} = \pm i\omega a e^{\pm i\omega t}$, $\ddot{u} = -\omega^2 a e^{\pm i\omega t}$ se obţine:

$$(k - \omega^2 m)a = 0,$$

de unde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (1\text{-}2)$$

ω se zice *pulsaţie* (sau *frecvenţă circulară*).

Soluţia generală a ecuaţiei (1-1) este o combinaţie liniară de soluţiile fundamentale, anume:

$$u(t) = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}$$

Constantele a_1, a_2 sunt complexe, astfel că *u* este real.

Cu $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$, soluţia devine

$$u(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), \qquad (1\text{-}3)$$

unde *a* şi *b* sunt constante reale.

Avem şi

$$\dot{u}(t) = -\omega a\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t), \qquad (1\text{-}3')$$

Ele se determină din condiţiile iniţiale ale ecuaţiei (1-1), anume:

$$u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0 \qquad (1\text{-}4)$$

Perioada vibraţiei este timpul τ după care funcţiile *u* şi $\dot{u}$ se reproduc, adică avem $\forall t \;\; u(t+\tau) = u(t)$ şi $\dot{u}(t+\tau) = \dot{u}(t)$.

Perioada minimă *T* – numită curent *perioada*, este dată de $\omega T = 2\pi$, sau

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1-5}$$

Numărul de perioade dintr-o secundă se zice *frecvenţă* şi este dat de

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1-6}$$

■

Dimensiuni fizice

$$[k] = \frac{F}{L}; \qquad [m] = M$$

unde *F* este forţa, *L* lungimea, iar *M* masa. Rezultă, din (1-2),

$$[\omega^2] = \frac{[k]}{[m]} = \frac{F}{L \times M} = \frac{M \times L / t^2}{L \times M} = \frac{1}{t^2},$$

În care, *t* este timpul. Astfel, pulsaţia are dimensiunea

$$[\omega] = \frac{1}{t}$$

Luând lungimea, masa şi forţa în unităţi SI, unităţile în care se măsoară *ω*, *T*, şi *f*, vor fi:

- Pulsaţia *ω*: $\frac{1}{s}$ (sau $\frac{rad}{s}$)
- Perioada *T*: s
- Frecvenţa *f*: $\frac{1}{s}$

■

Unităţi compatibile

Luând forţa sau lungimea în alte unităţi (decît unităţile SI), masa va fi mărime derivată, anume:

$$M = \frac{F}{L / t^2}$$

Exemple:

- Lungimea în *m*, iar forţa în *kN*:

  Rezultă că masa se va lua în

  $$\frac{kN \cdot s^2}{m} = 10^3 kg.$$

- Lungimea în *cm*, şi forţa în *daN*:

Unitatea de masa va fi

$$\frac{daN \cdot s^2}{cm} = 10kg \,.$$

Astfel, ω^2 va rezulta în $1/s^2$, iar ω în $1/s$.

■

1.2 Pulsaţii proprii

Noţiunile de pulsaţii proprii şi forme proprii de vibraţie sunt caracteristice *analizei dinamice linare* a unei structuri, fără amortizare.

Întrucât structurile care conţin cabluri au cel puţin neliniaritate geometrică, răspunsul dinamic este neliniar şi, în consecinţă, nu se poate vorbi de pulsaţii şi forme proprii de vibraţie.

Totuşi, la o *structură rigidă* - alcătuită fie din bare articulate, fie din cabluri puternic pretensionate, la care răspunsul neliniar este *apropiat* de cel liniar, se poate face o analiză dinamică liniară, lucrând pe ecuaţiile liniarizate.

Astfel, considerând o structură fără amortizare, ecuaţia care descrie răpunsul neliniar este (v. Capitolul 1):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t) \tag{1}$$

Considerăm răspunsul dinamic al structurii, încărcată *numai cu greutatea maselor*. Acesta va fi descris de ecuaţia

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{G} \tag{2}$$

Să considerăm și poziţia de echilibru a structurii sub încărcarea statică provenită din greutatea maselor – fie aceasta în configuraţia $\Gamma^0(\mathbf{U}^0)$, adică soluţia ecuaţiei

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^0) = \mathbf{G} \tag{3}$$

Scăzând ecuaţiile (2) și (3), rezultă

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\mathbf{U}) - \mathbf{f}(\mathbf{U}^0) = \mathbf{0} \tag{4}$$

Punem

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^0 \,,$$

presupunem ||**u**|| = *mică*, şi desvoltăm diferenţa din membrul doi. Avem:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) - \mathbf{f}(\mathbf{U}^0) = \mathbf{A}(\mathbf{U}^0)\mathbf{u} + \ldots$$

In care: $\mathbf{A}(\mathbf{U}^0)$ este matricea jacobian a funcției **f** calculată în $\mathbf{U}^0$, iar termenii nescrişi sunt de ordinul 2 și superior în **u**. Explicit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial U_j} \right]_{\mathbf{U}} \tag{5}$$

Astfel, ecuaţia (4) devine

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}(\mathbf{U}^0)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

În fine, notând

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}(\mathbf{U}^0) \tag{6}$$

ecuaţia devine

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Aceasta este ecuaţia diferenţială a micilor oscilaţii (vibraţii) în jurul configuraţiei de echilibru. Ea descrie mişcarea structurii scosă din poziţia de echilibru prin condiţii iniţiale $\mathbf{u}^0, \dot{\mathbf{u}}^0$, cu norma mică.

Pentru integrarea ecuaţiei (7), se caută soluţii de forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}e^{\pm i\omega t}$$

Cu $\dot{\mathbf{u}} = \pm i\omega \mathbf{a}e^{\pm i\omega t}$, $\ddot{\mathbf{u}} = -\omega^2 \mathbf{a}e^{\pm i\omega t}$ se obţine:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{8-0}$$

Aceasta reprezintă problema generalizată de valori proprii. Se notează – pentru moment,

$$\lambda = \omega^2$$

şi problema devine

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Valorile λ se zic valori proprii, iar

$$\omega = \sqrt{\lambda} \tag{9}$$

sunt *pulsaţiile proprii*. Vectorii proprii **a** se zic *forme proprii de vibraţie*.

Întrucât matricile **K** şi **M** sunt simetrice și pozitiv definite, se arată că problema (8) are valori proprii reale și pozitive $\lambda > 0$, asfel că pulsaţiile ω sunt reale.

Numărul de pulsaţii este egal cu numărul gradelor de libertate (ordinul matricilor **M** şi **K**).

1.3 Rezolvarea problemei (8)

Problema de valori proprii (8) se rezolvă printr-o metodă numerică.

Deseori problema (8) se reduce la problema standard de valori proprii, cum urmeaă.

Înmulţind la stânga ecuaţia (8) cu matricea $\mathbf{K}^{-1}$ şi notând $\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$, se obţie

$$(\mathbf{D} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Dezavantajul acestei formulări este că, în general, matricea **D** nu mai este simetrică şi astfel, metodele pentru matrici simetrice (de exemplu, Jacobi, iteraţii simultane) – nu mai pot fi utilizate. Pe de altă parte:

- Valorile proprii ale unei matrici simetrice sunt bine-condiţionate, pe când cele ale unei matrici nesimetrice pot fi rău-condiţionate.
- La utilizarea metodei QR, numărul de operaţii (pe un pas al iteraţiei QR) pentru o matrice simetrică este mult mai mic decât pentru o matrice generală.

Ţinând cont de definirea pozitivă a matricii **M**, problema generalizată (8) poate fi transformată în problema standard pentru o matrice simetrică cum urmează.

1. Se face descompunerea Cholesky a lui **M**:

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}^T\mathbf{S}, \tag{10}$$

unde **S** este o matrice superior triunghiulară. (Descompunerea inferior triunghiulară poate fi de asemenea utilizată).

Atunci, (8) scrisă în forma $\mathbf{Kx} = \lambda\mathbf{Mx}$, devine $\mathbf{Kx} = \lambda\mathbf{S}^T\mathbf{S}\mathbf{x}$, şi se scrie din nou ca şi

$$\mathbf{KS}^{-1}(\mathbf{S}\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{x}).$$

2. Se pune

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x}$$

Ecuaţia precedentă devine $\mathbf{KS}^{-1}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{S}^T\mathbf{y}$. Notăm

$$\mathbf{S}^{-T} = (\mathbf{S}^T)^{-1} = (\mathbf{S}^{-1})^T$$

și înmulțim la stânga cu $\mathbf{S}^{-T}$, obţinem

$$\mathbf{S}^{-T}\mathbf{KS}^{-1}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{I}\mathbf{y}$$

3. Acum, definim

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-T}\mathbf{KS}^{-1} \tag{11}$$

R este o matrice *simetrică şi pozitiv definită* (v. mai jos).

4. Problema (8) este pusă în forma standard pentru matricea **R**, şi anume,

$$(\mathbf{R}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{y}=\mathbf{0} \tag{12}$$

Problemele (12) şi (8) au aceleaşi valori proprii.

5. Dupa rezolvarea lui (12) pentru λ şi **y**, vectorii proprii ai problemei originale (8) sunt daţi (cf. 2.) de

$$\mathbf{x}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y} \tag{13}$$

■

R este *simetrică şi pozitiv definită*:

$$\mathbf{R}^T=(\mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1})^T=\mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}^T\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}^{-T}\mathbf{K}\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{R}$$

Apoi, pentru orice $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$,

$$\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x}=(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x})^T\mathbf{K}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x})=\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u}>0,$$

întrucât $\mathbf{u}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$ este arbitrar şi nonzero, la fel ca şi **x**.

Urmează că valorile proprii ale lui **R** sunt reale şi pozitive, aşa cum trebuie să avem conform cu $\lambda_i=\omega_i^2$. Astfel, pentru a rezolva (12), orice metodă pentru problema de valori proprii ale unei matrici simetrice şi pozitiv definite poate fi aplicată lui **R**.

■

Scalare

Matricea **R** poate fi scalată, adică se pune $\mathbf{R}=\mathbf{R}'*\mathit{factor}$. Ecuaţia (12) devine

$(\mathbf{R}'-\lambda'\mathbf{I})\mathbf{y}=\mathbf{0}$, unde

$$\lambda'=\frac{\lambda}{\mathit{factor}}$$

Astfel, după determinarea valorilor proprii λ' avem $\lambda=\lambda'*\mathit{factor}$, iar pulsaţiile proprii se găsesc din:

$$\omega=\sqrt{\lambda'*\mathit{factor}}$$

■

Calculul lui **R**

- Cel mai simplu caz este acela în care matricea **M** este *diagonală* (model de mase concentrate), $\mathbf{M} = diag(m_i)$.

  Atunci, avem $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T = diag(\sqrt{m_i})$, şi $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-T} = diag(1/\sqrt{m_i})$. Astfel, elementele lui **R** şi **x** sunt date de**:**

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}}, \quad i, j = \overline{1,n}$$

$$x_i = \frac{y_i}{\sqrt{m_i}}, \quad i = \overline{1,n}.$$

- Dacă **M** nu este diagonală: notând $\mathbf{Z} = \mathbf{S}^{-1}$, matricea **Z** se calculează uşor din $\mathbf{S}\mathbf{z}^{(j)} = \mathbf{e}^{(j)}$, $j = \overline{1,n}$ prin substituţie înapoi, întrucât **S** este superior triunghiulară. Apoi, $\mathbf{R} = \mathbf{Z}^T\mathbf{K}\mathbf{Z}$ şi $\mathbf{x} = \mathbf{Z}\mathbf{y}$.

Exemplu

Fie matricile:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Avem:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & \sqrt{2.5} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1/\sqrt{2} & \\ & & 1/\sqrt{2.5} \end{bmatrix}$$

Rezultă:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1.5 & -2/\sqrt{5} \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 2.4 \end{bmatrix}$$

Pentru valorile proprii şi vectorii proprii ai lui **R,** v. [3] “ANA – Manual de utilizare”.

■

NOTE

1. Algoritm şi Rutine

Rutinele pentru calculul pulsaţiilor şi vectorilor proprii prin metoda de mai sus, se găsesc în folderele din `\ANA\EIGEN\` – Biblioteca ANA - v. [3].

Calculul va parcurge următorii paşi:

1) Calculul matricii **R**: `\Eigen\General_R` (sau `General_R1`)
   - Matricea de rigiditate **K** va fi furnizată de programul NELSAS – cu încărcările date de greutatea maselor.
   - Matricea de masă **M** va fi:
     - Generată direct, pentru mase concentrate;
     - Furnizată de programul DINSAS, pentru mase distribuite. (Acesta va fi rulat pe un interval mic, cu condiţii iniţiale nenule, şi încărcări nule)
2) Calculul valorilor şi vectorilor proprii ai matricii **R**: `\Eigen\QR`; `\Eigen\Jacobi_D`
3) Regăsirea valorilor şi vectorilor proprii ai problemei generalizate: `\Eigen\Retrieve_Eigen_from_R`

Toate rutinele menţionate lucrează în dublă precizie.

2. Unităţi de măsură

Pentru ca pulsaţiile să rezulte în s^{-1} trebuie ca elementele matricii **M** să fie în *kg*, iar cele ale matricii **K** în $\frac{N}{m}$ (sau, mai general, în unităţi compatibile – v. 1.1)

Programul `General_R` cere, la citirea din fişier a matricilor **M** şi **K**, introducerea unor factori care înmulţesc aceste matrici. Aceşti factori vor asigura transformarea unităţilor folosite la generarea matricilor, în unităţi SI (sau, în unităţi compatibile).

3. Pulsaţii sau frecvenţe

In particular, `General_R` permite opţiunea de a calcula pulsaţii sau frecvenţe. Frecvenţele sunt legate de pulsaţii prin

$f_i = \omega_i /(2\pi)$ [rad/s]

Perioadele de vibraţie sunt:

$T_i = \frac{1}{f_i}$ [s] ■

2 EXEMPLE de STRUCTURI

2.1 Ferma cablu Morris-Jensen

Acesta este tratată în [1, 2] şi reluată în [7].

Exemplul este important pentru că ferma-cablu a fost încercată experimental, şi astfel, valorile calculate se pot compara cu valorile măsurate.

Ferma este prezentată în ANEXE – Fig. 1.

Coordonatele nodurilor:

Nod	X	Y
1	24.3	39.1
2	25.	5.9
3	49.9	34.3
4	49.9	10.8
5	75.1	31.3
6	75.3	13.3
7	100.8	30.4
8	100.9	14.5
9	125.9	31.5
10	125.9	13.3
11	151.3	34.3
12	151.4	10.8
13	176.2	38.7
14	177.7	6.3
15	201.6	44.7
16	201.	0.5
17	0.9	44.6
18	0.	0.

Forţe de pretensionare iniţiale (*kgf*):

Element	Forţa
1	30.
2	29.67
3	29.4
4	29.19
5	29.19
6	29.46
7	29.64
8	29.91
9	30.24

```
10      29.55
11      29.46
12      29.19
13      29.19
14      29.4
15      29.64
16      30.
17-23   2.25
```

Mărimile anterioare sunt măsurate (în configuraţia de echilibru la pretensionare)
$E \cdot A = 19450\ kgf / cm^2$ - pentru cabluri, şi $10500\ kgf / cm^2$ – pentru montanţi.
În calcule (A.Ch., 2007), aria tuturor elementelor (cabluri şi montanţi) s-a luat de $1\,cm^2$.

Modelul de masă este cel al maselor concentrate.

Distribuţia maselor, in *kg*

Caz	A	B	C
Nodurile superioare	0.03	0.01	0.5
Nodurile inferioare	1.0	0.5	0.5

Frecvenţe (1/*s*) – Cazul "A"

Nr. crt.	Experimental (Jensen, 1970)	Calculat (Kwan, 2000)	Calculat (A.Ch., 2007)
1	5.7	5.683	5.698294
2	8.1	8.009	7.999019
3	10.9	10.402	10.422799
...	...	...	...
27	---	---	1469.618
28	---	1557.5	1559.720

Frecvenţe (1/*s*) – Cazul "B"

Nr. crt.	Experimental (Jensen, 1970)	Calculat (Kwan, 2000)	Calculat (A.Ch., 2007)
1	7.50	8.077	8.078939
2	11.1	11.382	11.355259
3	14.5	14.781	14.785536
...	...	...	...
27	---	---	2545.372
28	---	2697.7	2701.471

Frecvenţe (1/*s*) – Cazul "C"

Nr. crt.	Calculat (Kwan, 2000)	Calculat (A.Ch., 2007)
1	5.768	5.772829
2	8.124	8.131251
3	10.569	10.59323
...	...	...
27	---	381.5504
28	1557.5	382.3856

2.2 Exemplul ADEN

Structura este o reţea de cabluri în formă de paraboloid hiperbolic constituind structura de acoperiş pentru clădirea *Aden Airways*.

Structura este prezentată în ANEXE – Fig. 2.

Reţeaua este alcătuită din câte 7 cabluri, dispuse după direcţiile x şi y, la distanţe egale. Proiecţia pe planul orizontal este un pătrat cu latura de 35.052 *m*.

Ecuaţia suprafeţei este (*m*):

$$z = \frac{5.334}{17.526}x^2 - \frac{3.81}{17.526}y^2$$

Caracteristicile mecanice sunt:

Elemente	Arie (cm^2)	Forţe de pretensionare iniţiale (*kN*)
1 -32 (cabluri, direcţia *x*)	12.7096	142.97
33-64 (cabluri, direcţia *y*)	12.7096	200.17

Modul de elasticitate: $E = 16547.42\ kN/cm^2$.

Valori de calcul (A.Ch., 2010):

- Densitate de masă: $\rho = 7.852\text{E-}4\ (kN \cdot s^2/m)/(cm^2 \cdot m)$

  (densitate de masă liniară: ≈ 10 *kg/m*)
- Masa concentrată în nod – din greutatea cablurilor: 87.63 *kg*

  (~87.63E-3 $kN \cdot s^2/m$).

Acceleraţia gravitaţiei: g = -9.81 m/s^2.

Pulsaţii calculate (*rad/s*) – Aden, mase concentrate

Nr. crt.	Geshwinder & West (1979)	Kwan (2000)	A.Ch. (2012)
1	32.87	32.890	32.87524
2	39.18	39.203	39.18506
3	39.89	39.909	39.76658
...	...	...	...
74	---	---	1433.720
75	1436	1435.896	1442.498

Pulsaţii calculate (*rad/s*) – Aden, mase distribuite

Nr. crt.	Kwan (2000)	A.Ch. (2012)
1	36.473	36.66083
2	45.211	46.48641
3	46.432	46.60045
...	...	...
74	---	2276.227
75	15733	2289.504

BIBLIOGRAFIE

1. Chisăliţă, A., “ Contribuţii la studiul răspunsului neliniar, static şi dinamic, al sistemelor suspendate “, Teză de doctorat, I.P.C.-N., Cluj-Napoca, 1983.
2. Chisăliţă, A., “ Finite Deformation Analysis of Cable Network “, Journal of Engineering Mechanics Division, vol.100, No.2, February 1984.
3. Chisăliţă, A., “ANA – Manual de utilizare”, U.T.C.-N. 2012, ftp.utcluj.ro/pub/users/chisalita/ANA/
4. Krishna, P., “ Cable Suspended Roofs “, McGraw Hill Book Co., 1978
5. Buchholdt, H.A., “An introduction to cable roof structures”, 2nd ed., Thomas Telford, 1999.
6. Chisăliţă, A., “ Program NELSAS “, Manual de utilizare, U.T.C.-N., 2007
7. Kwan, A.S.K., “A simple technique for calculating natural frequencies of geometrically nonlinear prestressed cable structures”, Computers and Structures 74 (2000), 41-50.

ANEXE

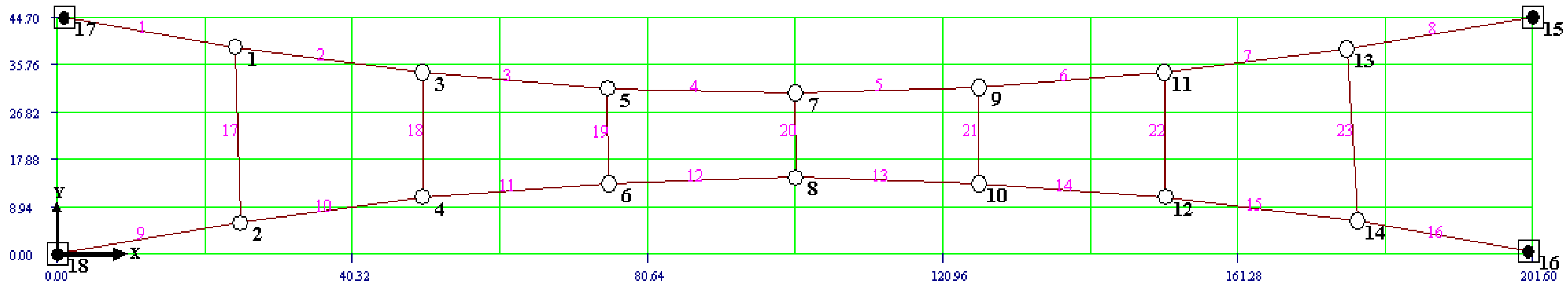

Fig. 1 – Ferma Morris-Jensen

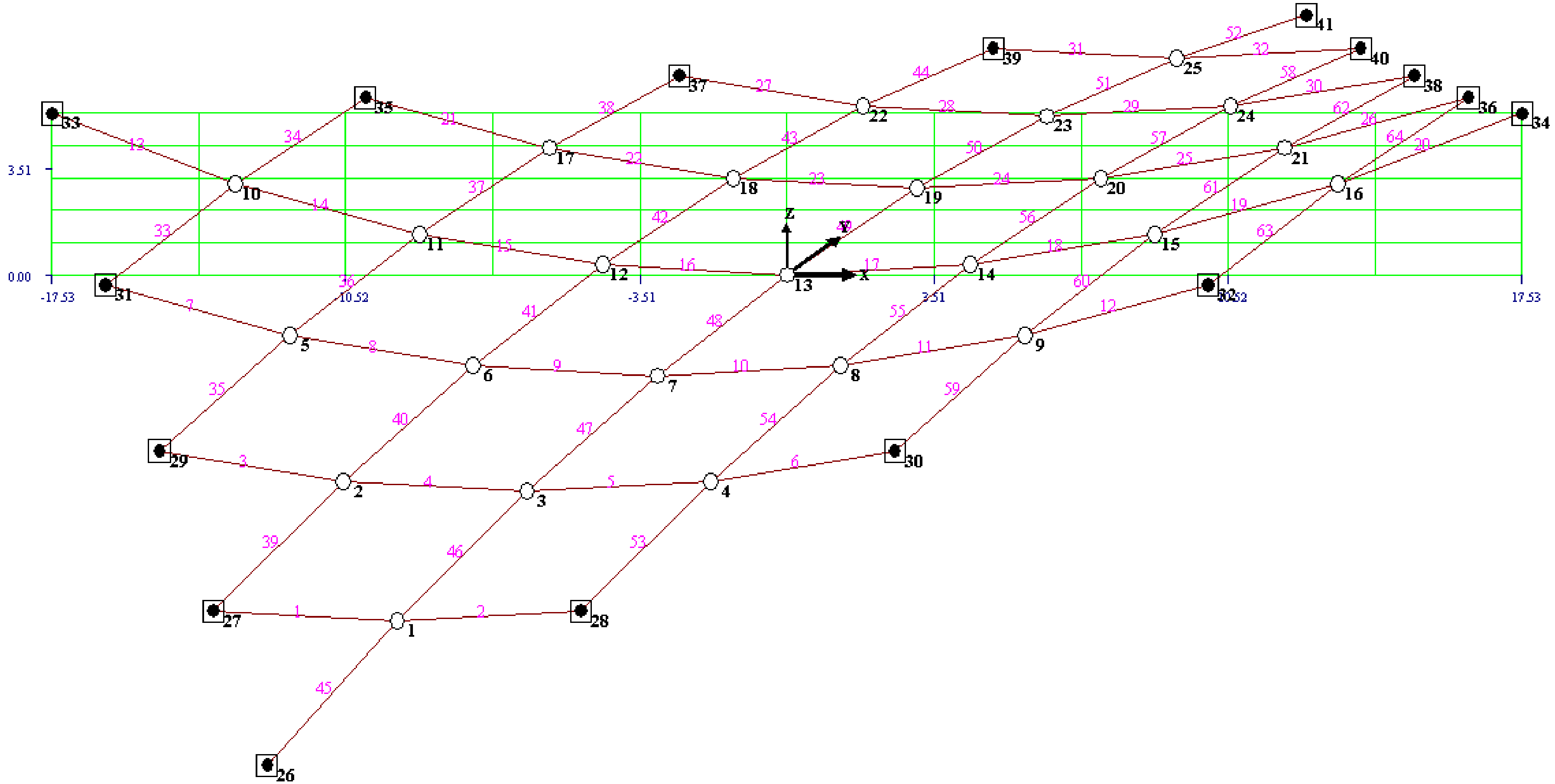

Fig. 2 – Acoperişul ADEN