OPERATORI UTILIZAŢI ÎN DINAMICA STRUCTURILOR
(Sumar)

1 Operatori de integrare numerică (intr-un singur pas, în mai mulţi paşi; expliciţi, impliciţi)

1.1 Definiţii

Se consideră ecuaţia diferenţiala:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1-1}$$

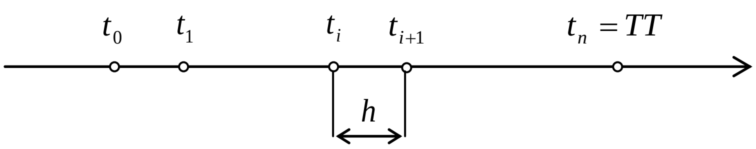
cu condiţia iniţială

$$x(t_0) = x_0 \tag{1-2}$$

Găsirea soluţiei ecuaţiei (1-1) printr-o metodă numerică se va numi integrare numerică sau integrare *pas cu pas*. Metoda constă în următoarele:

a) Intervalul de integrare $[t_0, TT]$ se divizează prin punctele $t_i, i = \overline{0,n}$, unde $t_n = TT$.

b) Ecuaţia (1) se cere să fie satisfăcută în punctele t_i, iar între aceste puncte, variaţia funcţiei $x(t)$ se estimează.



Vom nota în ceea ce urmează:

$x(t_i)$ = soluţia exactă;

x_i = soluţia calculată în t_i;

$e_i = x(t_i) - x_i$,

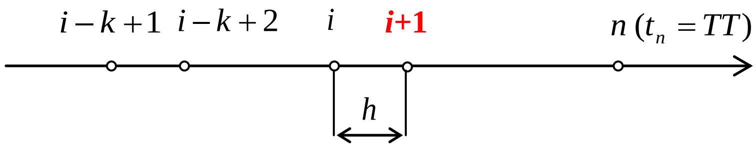
unde e_i este *eroarea de trunchiere globală a metodei*, pe pasul *i*.

Avem $x(t_i) = x_i + e_i$.

Un *operator de integrare numerică* este reprezentat de o formulă care dă soluţia la momentul t_{i+1} în funcţie de soluţia calculată la *k* momente anterioare

$t_i, t_{i-1}, \ldots, t_{i-k+1}$ (unde $i-k+1 \geq 0$):

$$x_{i+1} = g(x_{i+1}; x_i, \ldots, x_{i-k+1}) \qquad (1\text{-}3)$$



Dacă în membrul doi din (1-3), *g* este funcţie numai de x_i, şi eventual x_{i+1}, operatorul se zice *într-un pas*, altfel se zice *în mai mulţi paşi* (şi anume, în *k* paşi), sau *multi-pas*.

Dacă în membrul doi din (1-3) apare şi x_{i+1}, operatorul se zice *implicit*, în caz contrar se zice *explicit*. Integrarea prin operatori impliciţi conduce la rezolvarea ecuaţiei (1-3) în necunoscuta x_{i+1}, printr-o metodă pentru ecuaţii neliniare.

Distanţa dintre două puncte succesive de diviziune a intervalului de integrare se zice *pas* de integrare:

$$h_{i+1} = t_{i+1} - t_i .$$

Cazul comun este acela în care pasul este constant: $h_{i+1} = h$. Avem

$$t_{i+1} = t_i + h \qquad (h = \text{constant}),$$

dar există algoritmi care utilizează paşi variabili.

Operatori multi-pas, liniari

Dacă funcţia *g* din (1-3) este liniară în x_j şi în $f_j = f(t_j, x_j)$, $j = i+1, i, \ldots, i-k+1$, operatorul se zice *liniar*.

Considerăm cazul operatorilor multi-pas *liniari* şi cu *pas constant h*, adică:

$$t_j = t_0 + jh, \quad j \geq 1;$$

Astfel, ecuaţia (1-3) devine

$$x_{i+1} = a'_{k-1}x_i + a'_{k-2}x_{i-1} + \ldots + a'_0 x_{i-k+1} \\ + h(b_k f(t_{i+1}, x_{i+1}) + b_{k-1} f(t_i, x_i) + \ldots b_0 f(t_{i-k+1}, x_{i-k+1})) \tag{1-4}$$

În (1-4) vom presupune că cel puţin unul dintre a'_0, b_0 este diferit de zero (operatorul are k paşi); în rest, oricare alt coeficient poate fi zero. Dacă $b_k \neq 0$ operatorul este implicit, iar dacă $b_k = 0$ el este explicit. Condensat, (1-4) se scrie:

$$x_{i+1} = \sum_{l=0}^{k-1} a'_l x_{i-k+1+l} + h\sum_{l=0}^{k} b_l f_{i-k+1+l}, \quad i \geq k-1 \tag{1-4a}$$

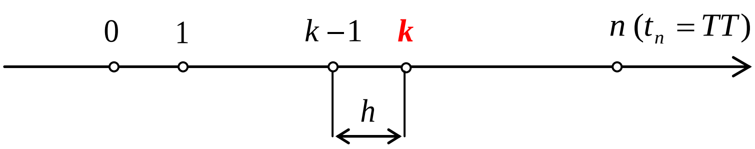
Observaţie

Pentru simplificarea notaţiei indexate, să notăm

$i+1 = k$,

rezultă $i-k+1=0$. Adică:

- Valoarea care se calculează este x_k, şi cele k valori anterioare sunt $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_0$. (Aceasta nu restrânge generalitatea).
- Momentul curent devine t_k, iar momentele anterioare sunt $t_{k-1}, \ldots, t_0$.



Astfel, relaţia (1-3) devine:

$$x_k = g(x_k; x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0) \tag{1-5}$$

Analog, operatorul multi-pas, (1-4) se scrie:

$$x_k = a'_{k-1}x_{k-1} + a'_{k-2}x_{k-2} + \ldots + a'_0 x_0 \\ + h(b_k f(t_k, x_k) + b_{k-1} f(t_{k-1}, x_{k-1}) + \ldots b_0 f(t_0, x_0))$$

$$x_k = \sum_{l=0}^{k-1} a'_l x_l + h\sum_{l=0}^{k} b_l f_l$$

Forma generală a unei metode multi-pas (1-4) este

$$\sum_{l=0}^{k} a_l x_l = h\sum_{l=0}^{k} b_l f_l \tag{1-6}$$

în care s-a pus $a_l = -a_l'$, $l = \overline{0, k-1}$.

În (1-6) se pun condiţiile:

$a_k = 1$ (mai general, $a_k \neq 0$, pentru explicitare în raport cu x_k)

$|a_0| + |b_0| \neq 0$ (metoda are *k* paşi).

1.2 Eroare de trunchiere şi ordin

Reluăm (1-5):

$$x_k = g(x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0)$$

Avem următoarele definiţii:

- *Eroarea de trunchiere globală* pe pasul t_k este eroarea valorii calculate x_k, adică:

$$e_k = x(t_k) - x_k, \tag{1-7}$$

unde $x(t_k)$ este valoarea exactă (sau, valoarea adevărată).

- *Eroarea de trunchiere locală* T_k pe t_k, a metodei (1-5), este definită de:

$$x(t_k) = g(x(t_k), \ldots, x(t_0)) + T_k, \tag{1-8}$$

adică eroarea formulei metodei, când valorile calculate se înlocuiesc cu valorile exacte.

■

Să presupunem acum, că cele *k* valori *anterioare* sunt *exacte*, adică avem

$$x_l = x(t_l), \quad l = \overline{0, k-1},$$

şi calculăm x_k din (1-5). Notăm această valoare cu $\tilde{x}_k$, adică

$$\tilde{x}_k = g(\tilde{x}_k, x_{k-1}(t_k), \ldots, x(t_0)), \tag{1-9}$$

şi eroarea ei, cu

$$\tilde{e}_k = x(t_k) - \tilde{x}_k$$

Aceasta este eroarea formulei metodei, când valorile anterioare se înlocuiesc cu valorile exacte.

Înlocuind $x(t_k)$ din (1-8) şi $\tilde{x}_k$ din (1-9), rezultă relaţia între $\tilde{e}_k$ şi T_k:

$$\tilde{e}_k = g(x(t_k), x(t_{k-1})\ldots, x(t_0)) + T_k - g(\tilde{x}_k, x(t_{k-1}),\ldots, x(t_0))$$

Dacă metoda este *explicită*, atunci avem ($x(t_k)$ şi $\tilde{x}_k$ nu apar in membrul doi):

$$\tilde{e}_k = T_k,$$

Pentru o metodă implicită, avem următoarele evaluări:

$$\tilde{e}_k = T_k + \frac{\partial g(\xi_k, x(t_{k-1}),\ldots, x(t_0))}{\partial x_k}(x(t_k) - \tilde{x}_k)$$

unde ξ_k este între $x(t_k)$ şi x_k.

Sau, cu $x(t_k) - \tilde{x}_k = \tilde{e}_k$, şi notând derivata parţială cu *B*, avem:

$$\tilde{e}_k = T_k + B\tilde{e}_k$$

Rezultă

$$\tilde{e}_k = T_k \frac{1}{1-B}$$

Pentru un operator liniar (1-6), se arată că avem $\tilde{e}_k = T_k + hc_k T_k + \ldots$, adică,

partea principală a lui $\tilde{e}_k$ este T_k,

Astfel, T_k poate juca rolul de măsură a erorii lui $\tilde{x}_k$.

■

Definiţie

Formula (1-5) se zice "exactă" pentru o funcţie $x(t)$ dacă eroarea de trunchiere locală este zero, $T_k = 0$.

(Adică, cu ipotezele $x_l = x(t_l),\quad l = \overline{0, k-1}$ avem şi $x_k = x(t_k)$.) ■

Definiţie: Ordinul metodei

Dacă eroarea de trunchiere globală este de ordinul h^p, metoda se zice de *ordinul 'p'* ■

Definiţii echivalente ale ordinului:

- Metoda este de ordinul *p* dacă formula metodei este exactă pentru un polinom de gradul *p*, şi nu mai este exactă pentru un polinom de gradul $p+1$.
- Metoda este de ordinul *p* dacă formula metodei coincide cu seria Taylor trunchiată până la termenul de ordinul *p* inclusiv.

■

Ecuaţiile Dinamicii structurilor

Ecuaţiile care definesc mişcarea unui sistem cu un număr finit de grade de libertate sunt ecuaţii diferenţiale de ordinul doi. Argumentul funcţiilor este timpul *t*, şi vom adopta convenţia de notare a derivatelor din mecanică: $dA/dt = \dot{A}$. Vom considera ecuaţii de forma următoare:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t), \qquad (1)$$

în care: $\mathbf{U} = [u_1(t) \;\ldots\; u_n(t)]^T$ este vectorul gradelor de libertate u_j, $j = \overline{1,n}$; n este numărul gradelor de libertate; $\mathbf{M} = [m_{lj}]$ este o matrice constantă $n \times n$ – matricea de masă; $\mathbf{g}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) = [g_1(u_1,\cdots,u_n,\dot{u}_1,\cdots,\dot{u}_n) \;\ldots\; g_n(u_1,\cdots,u_n,\dot{u}_1,\cdots,\dot{u}_n)]^T$ este funcţia de amortizare; $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [\,f_1(u_1,\cdots,u_n) \;\ldots\; f_n(u_1,\cdots,u_n)]^T$ este funcţia de rigiditate; iar $\mathbf{P}(t) = [\,p_1(t) \;\ldots\; p_n(t)]^T$ este funcţia de excitaţie. Matricea $\mathbf{M}$ este simetrică şi pozitiv definită.

Exemple de funcţii de amortizare:

$$\mathbf{g}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_1(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}}; \qquad \mathbf{g}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{g}_2(\dot{\mathbf{U}}).$$

Soluţia ecuaţiei (1) se mai zice *răspuns* (dinamic), şi anume: $\mathbf{U}(t)$ - răspuns în deplasări, $\dot{\mathbf{U}}(t)$ - răspuns în viteze, etc.

În particular, dacă $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\dot{\mathbf{U}})$ şi funcţiile $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{g}$ sunt liniare, sistemul se zice *liniar* şi ecuaţia (1) ia forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t), \qquad (2)$$

în care $\mathbf{C} = [c_{lj}]$ şi $\mathbf{K} = [k_{lj}]$ sunt matrici constante *n*×*n*, numite matricea de amortizare şi de rigiditate, respectiv. Matricea **K** este simetrică şi pozitiv definită. În particular, dacă **C** = **0**, ecuaţia (2) devine:

$$\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{P}(t) \qquad (2')$$

Condiţiile iniţiale pentru (1, 2) sunt:

$$\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{U}_0,\ \mathbf{\dot{U}}(t_0) = \mathbf{\dot{U}}_0, \qquad (3)$$

unde obişnuit, $t_0 = 0$. Pentru unii operatori este necesară şi acceleraţia iniţială $\mathbf{\ddot{U}}_0 = \mathbf{\ddot{U}}(t_0)$, care se determină din ecuaţia (1) sau (2) scrisă pentru $t = t_0$. De exemplu, pentru (1) rezultă:

$$\mathbf{M\ddot{U}}_0 = \mathbf{P}(t_0) - \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \mathbf{\dot{U}}_0) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) \qquad (4)$$

Determinarea lui $\mathbf{\ddot{U}}^{(0)}$ revine la rezolvarea sistemului liniar (4).

Observaţie

În cazul **C = 0**, sau dacă **C** îndeplineşte o condiţie – v. mai jos, ecuaţiile liniare (2) se pot decupla cum urmează. Se consideră ecuaţia mişcării libere (**P** = **0**):

$$\mathbf{M\ddot{U}} + \mathbf{KU} = \mathbf{0}$$

care se integrează căutând soluţii de forma $\mathbf{U} = \mathbf{a}e^{i\omega t}$, obţinând

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Se arată că problema de valori proprii $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$ are valori proprii reale şi pozitive, astfel că $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Vectorii proprii **a** sunt ortogonali în raport cu **M** şi cu **K**, adică: $\mathbf{a}_i^T\mathbf{M}\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_i^T\mathbf{K}\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, $j \neq i$. Considerăm matricea **Φ** cu coloanele formate din vectorii proprii $\mathbf{a}_i$. Avem: $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\cdot\mathbf{\Phi} = diag(M_l)$, $\mathbf{\Phi}^T\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{\Phi} = diag(K_l)$, şi $K_l = \omega_l^2 M_l$. Punem

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{Y}.$$

Înlocuind în (2) şi înmulţind la stânga cu $\mathbf{\Phi}^T$, rezultă

$$(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi})\cdot\mathbf{\ddot{Y}} + (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C\Phi})\cdot\mathbf{\dot{Y}} + (\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K\Phi})\cdot\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{P}(t).$$

Dacă matricea $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = diag(C_l)$, (în particular aceasta are loc dacă **C = 0** sau $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$**)** rezultă:

$$diag(M_l)\ddot{\mathbf{Y}} + diag(C_l)\dot{\mathbf{Y}} + diag(K_l)\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{P}}(t)$$

în care $\overline{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{\Phi}^T \cdot \mathbf{P}(t)$. Sau,

$$\ddot{y}_l + 2\xi_l\omega_l\dot{y} + \omega_l^2 y_l = p_l(t), \quad l = \overline{1,n} \tag{5}$$

unde s-a pus $C_l / M \ = 2\zeta_l\omega_l$, $p_l(t) = \overline{P}_l(t) / M_l$, iar $K_l / M_l = \omega_l^2$. În particular, dacă **C** = **0**, avem:

$$\ddot{y}_l + \omega_l^2 y = p_l(t), \quad l = \overline{1,n} \tag{6}$$

■

Ecuaţiile (1, 2) sunt reductibile la un sistem de ordinul unu şi pot fi integrate cu metode numerice pentru ecuații de ordinul întâi, de exemplu metode Runge-Kutta. Sau, pot fi integrate cu metode pentru ecuații de ordinul doi (ex.: Nyström, Störmer - v. Hairer și al., 1987). Totuşi, pentru ecuaţiile (1,2), s-au desvoltat metode speciale de integrare numite metode de *integrare directă*. O prezentare comparativă se dă în Dokainsh and Subbaraj (1989). O analiză a metodei diferenţelor centrale, Houbolt, Newmark şi Wilson, se dă în Bathe și Wilson (1976). Metoda Newmark este expusă în articolul autorului (1959), şi analizată în multe studii ulterioare. În această Secţiune vom prezenta câteva dintre aceste metode.

Un *operator de integrare directă* este constituit din două formule care dau expresia deplasării $\mathbf{U}_{i+1}$ şi vitezei $\dot{\mathbf{U}}_{i+1}$, în funcţie de valorile lui **U** şi derivatelor acestuia, pe pasul/paşii anteriori. Clasificarea în operatori expliciţi/impliciţi şi operatori într-un singur pas/în mai mulţi paşi, se aplică.

2 Operatori expliciţi

Următorii operatori expliciţi sunt utilizaţi:

- Metoda diferenţelor centrale (ordin 2; explicită – numai dacă **g** este liniară)
- Metode Runge-Kutta (ordin 4)

Metoda Runge-Kutta cere transformarea ecuaţiei (1, 2) într-un sistem echivalent de ordinul întâi.

- Se mai pot utiliza operatori multi-pas (liniari), expliciţi sau impliciţi, pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul doi.

  Pentru aceasta, ecuaţia de ordinul doi $\ddot{u} = f(t, u, \dot{u})$ se transformă într-un sistem echivalent de ordinul întâi, adică:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= f(t, u, v) \end{aligned}$$

  Apoi, se aplică un operator multi-pas (pentru fiecare din ecuaţii), în forma:

$$\sum_{l=0}^{k} a_l u_l = h \sum_{l=0}^{k} b_l v_l \,, \qquad \sum_{l=0}^{k} a_l v_l = h \sum_{l=0}^{k} b_l f_l \,,$$

  în care $f_l = f(t_l, u_l, v_l)$.

  În particular, pentru ecuaţii de forma $\ddot{u} = f(t, u)$ (aceasta revine la ecuații (1) care nu conţin amortizare: $\mathbf{g} = \mathbf{0}$), operatorul ia forma:

$$\sum_{l=0}^{k} a_l x_l = h^2 \sum_{l=0}^{k} b_l f_l \tag{6}$$

Operatori utilizaţi sunt: Adams (ordine 2-4); Störmer; Numerov. V. Hairer et al. (1987).

2.1 Metoda diferenţelor centrale

Vom expune *metoda diferenţelor centrale*: vom da formulele pentru o singură ecuaţie (n = 1), generalizând apoi, la un sistem.

2.1.1 Formulele metodei

Presupunem că u admite derivate continue până la ordinul 4 inculsiv. Desvoltările Taylor pentru $u(t + h)$ şi $u(t - h)$ dau:

$$u(t+h) = u(t) + h\dot{u}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{u}(t) + \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_1)\,; \qquad t < \xi_1 < t+h$$

$$u(t-h) = u(t) - h\dot{u}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{u}(t) - \frac{h^3}{3!}u^{(3)}(t) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_2)\,; \qquad t-h < \xi_2 < t$$

Adunând relaţiile anterioare, se obţine:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{h^2}[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{24}[u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]$$

Cu teorema Darboux avem $[u^{(4)}(\xi_1) + u^{(4)}(\xi_2)]/2 = u^{(4)}(\xi)$, unde $t - h < \xi < t + h$. Rezultă:

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{h^2}[u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)] - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi); \qquad t-h < \xi < t+h$$

Analog, scăzând desvoltările Taylor (până la termenul în $u^{(3)}$), şi împărţind cu 2*h*, se obţine:

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2h}[u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{12}[u^{(3)}(\eta_1) + u^{(3)}(\eta_2)]$$

sau

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2h}[u(t+h) - u(t-h)] - \frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta); \qquad t-h < \eta < t+h$$

Rescriem relaţiile anterioare pentru $t = t_i$, $t + h = t_{i+1}$, $t - h = t_{i-1}$:

$$\ddot{u}(t_i) = \frac{1}{h^2}[u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i''; \qquad T_i'' = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi) \qquad (7a)$$

$$\dot{u}(t_i) = \frac{1}{2h}[u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i'; \qquad T_i' = -\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta) \qquad (7b)$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$. Metoda diferenţelor centrale constă în a aproxima derivatele $\ddot{u}$ şi $\dot{u}$ prin primul termen din membrul doi al relaţiilor anterioare. Notând cu $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ aproximaţiile pentru $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$, rezultă formulele metodei:

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \qquad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) \qquad (8b)$$

Erorile de trunchiere *locale* în (8a) şi (8b) sunt chiar T_i'', T_i' din (7a) şi (7b).

Pentru un sistem, avem:

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{h^2}(\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) \tag{9a}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_i = \frac{1}{2h}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}) \tag{9b}$$

Pentru erorile de trunchiere locale în (9a, 9b), considerăm relaţiile (7a, 7b) scrise pentru fiecare coordonată $j = \overline{1,n}$; astfel, rezultă:

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2}(\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i'' \tag{9c}$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h}(\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{T}_i' \tag{9d}$$

în care:

$$\mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12}[\ldots, u_j^{(4)}(\xi_j), \ldots]^T, \qquad \mathbf{T}_i' = -\frac{h^2}{6}[\ldots, u_j^{(3)}(\eta_j), \ldots]^T$$

Rezultă şi:

$$\| \mathbf{T}_i'' \|_\infty \le \frac{h^2}{12} C_4, \quad \| \mathbf{T}_i' \|_\infty \le \frac{h^2}{6} C_3,$$

unde $| u_j^{(4)}(t) | \le C_4$, $| u_j^{(3)}(t) | \le C_3$.

2.1.2 Integrarea ecuaţiei (1, 2)

Înlocuind (9a, 9b), în (1) scrisă pentru momentul $t = t_i$, se obţine:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) \equiv$$
$$\frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) + \frac{\mathbf{M}}{h^2} \cdot (-2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) - \mathbf{P}(t_i) = 0 \tag{10}$$

Ecuaţia neliniară (10) se rezolvă, cu o metodă pentru ecuaţii neliniare, în necunoscuta $\mathbf{U}_{i+1}$. Pentru $i = 0$ este necesară valoarea $\mathbf{U}_{-1}$, care se determină din (9a, b) scrise pentru $i = 0$, şi eliminând $\mathbf{U}_1$. Rezultă:

$$\mathbf{U}_{-1} = \mathbf{U}_0 - h\dot{\mathbf{U}}_0 + (h^2/2)\ddot{\mathbf{U}}_0$$

Pentru cazul ecuaţiei liniare (2), ecuaţia (10) devine liniară în $\mathbf{U}_{i+1}$, şi anume:

$$\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{P}(t_i) - (\mathbf{K} - 2\mathbf{M}/h^2) \cdot \mathbf{U}_i - (\mathbf{M}/h^2 - \mathbf{C}/2h) \cdot \mathbf{U}_{i-1} \tag{10'}$$

în care: $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/h^2 + \mathbf{C}/2h$. Coeficienţii lui $\mathbf{U}_l$, $l = i+1, i, i-1$ se calculează la început, şi se utilizează la toţi paşii. Mai general, ecuaţia (10) devine liniară în $\mathbf{U}_{i+1}$ dacă **g** este liniară.

2.1.3 Stabilitate (liniară)

Stabilitatea liniară se consideră pentru ecuaţia liniară (2'), cu **P** = **0**. Întrucât aceasta se decuplează în forma (6), stabilitatea se discută pentru o singură ecuaţie de forma

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{11}$$

(Ecuaţia (11) este echivalentul ecuaţiei de test $x' = \lambda x$; derivând, înlocuind x' şi punând $\lambda = i\omega$ se obţine forma (11)). Cu (8a), ecuaţia (11) devine:

$$u_{i+1} - (2 - h^2\omega^2)u_i + u_{i-1} = 0 \tag{12}$$

Căutăm soluţii de forma $u_j = r^j$, rezultă că r este soluţie a ecuaţiei (caracteristice)

$$r^2 - (2 - x^2)r + 1 = 0 \tag{12'}$$

unde s-a pus, pentru moment, $x = h\omega$. Pentru ca soluţia ecuaţiei (12) să rămână mărginită trebuie ca rădăcinile ecuaţiei (12') să satisfacă condiţia $|r| \le 1$, iar rădăcinile de modul 1 să fie cel mult duble – v. ??.

Avem: $\Delta = x^2(x^2 - 4)$. Dacă rădăcinile sunt reale şi distincte ($x > 2$), condiţia nu poate fi îndeplinită (avem $r_1 r_2 = 1$). Pentru rădăcini complexe ($x < 2$) rezultă $|r|^2 = 1$, şi $r_1 \ne r_2$. Cazul $x = 2$ conduce la $r_{1,2} = -1$, care convine. Urmează că trebuie să avem $x = h\omega \le 2$, sau

$$h \le \frac{2}{\omega}.$$

Pentru un sistem, considerând ecuaţiile (6) pentru $i = \overline{1,n}$, rezultă condiţia

$$h \le \frac{2}{\omega_{\max}} \tag{13}$$

unde $\omega_{\max} = \max\limits_{i=1,n} \omega_i$. Cu $T = 2\pi/\omega$, condiţia (12) se pune şi sub forma

$h \le \frac{T_{min}}{\pi}$ ■

Mai general, stabilitatea se poate discuta pentru ecuaţia (5) cu amortizare ($\zeta > 0$):

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{14}$$

Procedând ca mai sus, se obţine ecuaţia cu diferenţe:

$$(1+\zeta\omega h)u_{i+1} - (2-h^2\omega^2)u_i + (1-\zeta\omega h)u_{i-1} = 0$$

şi ecuaţia caracteristică (unde $x = h\omega$):

$$(1+\zeta x)r^2 - (2-x^2)r + (1-\zeta x) = 0.$$

a) Cazul $0 < \zeta < 1$ (amortizare sub-critică):

- Rădăcini complexe sau egale: $x \le 2\sqrt{1-\zeta^2}$. Condiţia de rădăcini de mai sus este verificată.
- Radăcini reale: $x > 2\sqrt{1-\zeta^2}$. Condiţia de rădăcini conduce la $x \le 2$, aşadar $2\sqrt{1-\zeta^2} < x \le 2$.

Reunind soluţiile celor două sub-cazuri, rezultă:

$$h \le \frac{2}{\omega_{max}} \tag{15}$$

b) $\zeta \ge 1$ (amortizare critică/supra-critică). Se obţine: $x \le \zeta + \sqrt{\zeta^2 + 4}$. Rezultă:

$$h < \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2+4}}{\omega_{max}}. \tag{15'}$$

Marginile din (15, 15') se numesc *limita de stabilitate* (liniară).

2.1.4 Eroarea de trunchiere locală în $\mathbf{U}_{i+1}$

Reluăm (9c, 9d):

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{h^2}[\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}_i''; \qquad \mathbf{T}_i'' = -\frac{h^2}{12}\mathbf{C}_4 \tag{9c}$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i) = \frac{1}{2h}[\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})] + \mathbf{T}'_i; \qquad \mathbf{T}'_i = -\frac{h^2}{6}\mathbf{C}_3 \tag{9d}$$

Ecuaţia din care se determină $\mathbf{U}_{i+1}$ (ecuaţia scrisă pentru t_i), este:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2}(\mathbf{U}_{i+1} - 2\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i-1}) + \mathbf{g}(\mathbf{U}_i, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_{i-1}}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) - \mathbf{P}(t_i) = 0$$

Presupunem că $\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i$ sunt exacte. Avem:

$$\frac{\mathbf{M}}{h^2}\cdot(\mathbf{U}(t_{i+1}) - 2\mathbf{U}(t_i) + \mathbf{U}(t_{i-1})) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i) - \mathbf{P}(t_i) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Pe de altă parte:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t_i) + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) + \mathbf{f}(\mathbf{U}(t_i)) = \mathbf{P}(t_i)$$

Scăzând din aceasta relaţia precedentă, se obţine:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}''_i + \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \dot{\mathbf{U}}(t_i)) - \mathbf{g}(\mathbf{U}(t_i), \frac{\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1})}{2h}) - \mathbf{T}_{i+1} = 0$$

Sau:

$$\mathbf{M}\mathbf{T}''_i + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}'_i - \mathbf{T}_{i+1} = 0,$$

unde **G** este jacobianul lui **g** *în raport cu* $\dot{\mathbf{U}}$, iar ξ este pe segmentul care uneşte punctele $\dot{\mathbf{U}}(t_i)$ şi $(\mathbf{U}(t_{i+1}) - \mathbf{U}(t_{i-1}))/2h$. Rezultă:

$$\mathbf{T}_{i+1} = \mathbf{M}\mathbf{T}''_i + \mathbf{G}(\xi)\mathbf{T}'_i,$$

sau

$$\mathbf{T}_{i+1} = -\frac{h^2}{12}(\mathbf{M}\mathbf{C}_4 + 2\mathbf{G}(\xi)\mathbf{C}_3)$$

■

2.1.5 Eroarea de trunchiere globală şi ordin

Considerăm problema pentru o singură ecuaţie, generalizând apoi la un sistem. Fie ecuaţia (1) pentru *n* = 1:

$$m\ddot{u} + g(u, \dot{u}) + f(u) = p(t) \tag{16}$$

Propoziţie

Dacă $f'(u) \geq F^* > 0$ și $\partial g(u, \dot{u})/\partial \dot{u} > 0$, atunci metoda are ordinul $p = 2$

■

Exemplu: pentru ecuaţia liniară, avem: $f'(u) = k,\ g'(\dot{u}) = c$.

Demonstraţia:

Tratăm problema pentru o singură ecuaţie. Pentru un sistem, demonstraţia este analogă.

Reluăm formulele (7, 8):

$$\ddot{u}(t_i) = \frac{1}{h^2}[u(t_{i+1}) - 2u(t_i) + u(t_{i-1})] + T_i'' ; \qquad T_i'' = -\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i) \qquad (7a)$$

$$\dot{u}(t_i) = \frac{1}{2h}[u(t_{i+1}) - u(t_{i-1})] + T_i' ; \qquad T_i' = -\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta_i) \qquad (7b)$$

unde $t_{i-1} < \xi, \eta < t_{i+1}$.

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \qquad (8a)$$

$$\dot{u}_i = \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) \qquad (8b)$$

Scăzând (8a, 8b) respectiv din (7a, 7b), avem:

$$e_i'' = \frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + T_i''$$

$$e_i' = \frac{1}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1}) + T_i'$$

S-a pus: $e_i = u(t_i) - u_i$; $e_i' = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i$; $e_i'' = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i$.

Pe de altă parte, din

$$m\ddot{u}(t_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) + f(u(t_i)) = p(t_i)$$

şi

$$m\ddot{u}_i + g(u_i, \dot{u}_i) + f(u_i) = p(t_i)$$

rezultă:

$$m(\ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i) + g(u(t_i), \dot{u}(t_i)) - g(u_i, \dot{u}_i)) + f(u(t_i) - f(u_i)) = 0$$

Sau:

$$e_i'' + \frac{1}{m}\left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')e_i + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')e_i'\right] + \frac{1}{m}f'(\eta_i')e_i = 0,$$

unde ξ_i' şi η_i' sunt, respectiv, *între* $\dot{u}(t_i), \dot{u}_i$ şi $u(t_i), u_i$.

Înlocuind e_i'' şi e_i', rezultă:

$$\frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) - \frac{h^2}{12}C_{4i} + \frac{1}{m}\left[\frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')\frac{1}{h^2}(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')\frac{1}{2h}(e_{i+1} - e_{i-1})\right]$$
$$-\frac{h^2}{6}C_{3i} + \frac{1}{m}f'(\eta_i')e_i = 0$$

unde: $C_{4i} = u^{(4)}(\xi_i), C_{3i} = u^{(3)}(\eta_i)$.

Punâd $\beta_i = \frac{\partial g}{\partial u}(\xi_i')/m$, $\gamma_i = \frac{\partial g}{\partial \dot{u}}(\zeta_i')/2m$, $\varphi_i = f'(\eta_i')/m$, avem:

$$(1+\beta_i)(e_{i+1} - 2e_i + e_{i-1}) + \gamma_i h(e_{i+1} - e_{i-1}) + h^2\varphi_i e_i - \frac{h^4}{12}(C_{4i} + 2C_{3i}) = 0$$

$$e_{i+1}(1+\beta_i + h\gamma_i) - (2 + 2\beta_i - h^2\varphi_i)e_i + e_{i-1}(1+\beta_i - h\gamma_i) = h^4 C_i,$$

unde $C_i = (C_{4i} + 2C_{3i})/12$.

Introducem coeficienţii:

$$a_{i+1} = 1 + \beta_i + h\gamma_i; \qquad a_i = 2 + 2\beta_i - h^2\varphi_i; \qquad a_{i-1} = 1 + \beta_i - h\gamma_i.$$

Am presupus: $f'(u) > 0$ și $\partial g(u, \dot{u})/\partial \dot{u} > 0$. Astfel, pentru *h* suficient de mic, coeficienţii a_{i+1}, a_i, a_{i-1} sunt *pozitivi*. În plus, avem:

$$a_{i+1} + a_{i-1} - a_i = h^2\varphi_i$$

Rezultă:

$$a_{i+1}e_{i+1} - a_i e_i + a_{i-1}e_{i-1} = h^4 C_i,$$

Sau

$$a_i e_i + h^4 C_i = a_{i+1}e_{i+1} + a_{i-1}e_{i-1}$$

Luând modulele, şi ţinând cont de $a_j > 0$, rezultă:

$$a_i e_i + h^4 |C_i| \geq a_{i+1}|e_{i+1}| + a_{i-1}|e_{i-1}|$$

Sau:

$$a_i e_i + h^4 C \geq a_{i+1} | e_{i+1} | + a_{i-1} | e_{i-1} |$$

unde $| C_i | \leq C$.

Fie

$$e = \max_{j=1,n} | e_j |,$$

şi I indicele pe care este realizat maximul: $e = | e_I |$.

Avem $a_I e \geq a_i e_i$, şi rezultă:

$$a_I e + h^4 C \geq a_{i+1} | e_{i+1} | + a_{i-1} | e_{i-1} |.$$

Relaţia anterioară are loc *pentru orice i* (membrul întâi nu depinde de *i*): atunci, pentru $i+1=I$, rezultă:

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{i-1} | e_{i-1} |.$$

Şi, analog, pentru $i-1=I$

$$a_I e + h^4 C \geq a_{I+1} e + a_{I-1} e$$

Rezultă:

$$e(a_{I+1} + a_{I-1} - a_I) \leq h^4 C$$

Sau:

$$h^2 \varphi_I e \leq h^4 C$$

$$e \leq h^2 \frac{C}{\varphi_I}$$

În fine, ţinând cont de $\varphi_i = f'(\eta_i')/m$ şi de $f'(u) \geq F^* > 0$ şi, avem:

$$e \leq h^2 \frac{mC}{F^*}$$

Aceasta arată că metoda are ordinul $p=2$.

■

3 Operatori impliciţi

Vom prezenta operatorul Newmark (ordinul 2), şi un operator cu precizie mai mare (de ordinul 3), care generalizează operatorul Newmark.

3.1 Operatorul NEWMARK

Acesta este unul dintre cel mai utilizaţi operatori, datorită caracteristicilor sale de stabilitate, în ciuda ordinului său relativ mic.

3.1.1 Formulele operatorului

Vom prezenta formulele pentru o singură ecuaţie, generalizând apoi, la sistem. Formulele propuse de Newmark sunt (Newmark (1959)):

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1} \tag{22}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (1-\gamma)h\ddot{u}_i + \gamma h\ddot{u}_{i+1} \tag{23}$$

Se arată că dacă $\gamma \neq \frac{1}{2}$, metoda introduce o amortizare artificială a răspunsului în deplasări, proporţională cu $\gamma - \frac{1}{2}$. Luând $\gamma = \frac{1}{2}$, formula (23) devine:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \tfrac{1}{2}h\ddot{u}_i + \tfrac{1}{2}h\ddot{u}_{i+1} \tag{23'}$$

Formulele (22, 23') sunt controlate de parametrul *β*, de aceea metoda se mai zice metoda *β*-Newmark. Operatorul este implicit, întrucât conţine în membrul doi $\ddot{u}_{i+1}$. Se observă că formulele (22, 23') pot fi scrise sub forma:

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\Delta\ddot{u}_{i+1} \tag{24a}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + h\ddot{u}_i + \gamma h\Delta\ddot{u}_{i+1} \tag{24b}$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_{i+1} \tag{24c}$$

unde $\Delta\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i$ reprezintă creşterea de acceleraţie la sfârşitul intervalului. Astfel, <u>formulele estimează restul în seria Taylor</u> a funcţiilor u şi $\dot{u}$ (Chisăliţă A. et al.(1990)).

Vom considera, în ceea ce urmează, forma (24 a-c) a formulelor Newmark. Pentru un sistem, acestea sunt:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \overline{\mathbf{U}}_{i+1} + \beta h^2\Delta\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{25a}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{i+1} = \overline{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} + \gamma h \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{25b}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{U}}_{i} + \Delta \ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{25c}$$

în care, funcţiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate, şi anume:

$$\overline{\mathbf{U}}_{i+1} = \mathbf{U}_{i} + h\dot{\mathbf{U}}_{i} + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} \tag{26a}$$

$$\overline{\dot{\mathbf{U}}}_{i+1} = \dot{\mathbf{U}}_{i} + h\ddot{\mathbf{U}}_{i} \tag{26b}$$

3.1.2 Integrarea ecuaţiei (1)

Notăm, pentru simplificarea scrierii, cu 1 indicele pasului curent, şi 0 indicele pasului anterior ($t_0 = t_i$, $t_1 = t_{i+1}$). Înlocuind (25 a, b, c) în (1) scrisă pentru $t = t_1$, rezultă:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{g}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1,\ \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1) \tag{27}$$

Sau notând

$$\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1,$$

ecuaţia (27) devine:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0} \tag{28a}$$

în care

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}\mathbf{W} + \mathbf{g}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W},\ \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \mathbf{W}) + \mathbf{f}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \mathbf{W}) + \mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{U}}_0 - \mathbf{P}(t_1) \tag{28b}$$

Ecuaţia (28a) se rezolvă cu metoda Newton, sau cu iteraţia de punct fix. Rezolvarea trebuie făcută pe fiecare pas de integrare, pentru a calcula $\mathbf{W} = \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ (adică $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_{i+1}$, pentru pasul general $i+1$).

În cazul unui sistem liniar (2), $\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1$ se determină din ecuaţia liniară

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{C}(\overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{K}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1) = \mathbf{P}(t_1)$$

sau

$$\hat{\mathbf{M}}\Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 = \hat{\mathbf{P}},$$

unde:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \gamma h\mathbf{C} + \beta h^2\mathbf{K}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}\overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{K}\overline{\mathbf{U}}_1).$$

Metoda Newton

Notăm cu **J**(**W**) jacobianul funcţiei **F**, adică:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}(\mathbf{W}) &= \mathbf{M} + \beta h^2\mathbf{B}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2\mathbf{W}, \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h\mathbf{W}) \\ &+ \gamma h\mathbf{C}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2\mathbf{W}, \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h\mathbf{W}) + \beta h^2\mathbf{A}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2\mathbf{W})\end{aligned} \quad (29a)$$

în care: **B** şi **C** sunt jacobienii lui **g** în raport cu **U** şi $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; iar **A** este jacobianul lui **f**. Explicit:

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial u_j]_{i,j=1,n}; \quad \mathbf{C}(\mathbf{U},\dot{\mathbf{U}}) = [\partial g_i / \partial \dot{u}_j]_{i,j=1,n}; \\ &\mathbf{A}(\mathbf{U}) = [\partial f_i / \partial u_j]_{i,j=1,n}\end{aligned} \quad (29b)$$

Pentru un sistem liniar (2), avem $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, **C =** constant, **A** = **K** (constant).

Schema de iterare este (v. 3-IV, 2.2):

$$\mathbf{J}(\mathbf{W}_n) = -\mathbf{F}(\mathbf{W}_n) \quad (30a)$$

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \quad (30b)$$

Iteraţia (30) se continuă până când unul din testele următoare este satisfăcut:

$\| \delta_{n+1} \| \leq \varepsilon$,   numărul de iteraţii ≤ *LNIT*,

unde ε şi *LNIT* sunt aleşi dinainte. În general, sunt suficiente un număr redus de iteraţii, şi metoda Newton se recomandă pentru rezolvarea ecuaţiei (28).

Metoda punctului fix. Limită de convergenţă.

Ecuaţia (27) se poate pune sub forma

$$\mathbf{W} = \mathbf{G}(\mathbf{W}) \quad (31a)$$

în care:

$$\begin{aligned}&\mathbf{G}(\mathbf{W}) = \\ &\mathbf{M}^{-1}[-\mathbf{g}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2\mathbf{W}, \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h\mathbf{W}) - \mathbf{f}(\overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^2\mathbf{W}) + \mathbf{P}(t_1)] - \ddot{\mathbf{U}}_0\end{aligned} \quad (31b)$$

Pentru convergenţa iteraţiei $\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{G}(\mathbf{W}_j),\ \mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$, este suficient ca:

$$\| \mathbf{J}_G(\mathbf{W}) \|_\infty < 1$$

unde $\mathbf{J}_G(\mathbf{W})$ este jacobianul lui **G**. Aceasta conduce la condiţia (Chisăliţă A. et al. (1991))

$$h < h_c, \quad h_c = \frac{-b\gamma + \sqrt{b^2\gamma^2 + 4(M/n)a\beta}}{2a\beta},$$

în care $1/M = \| \mathbf{M}^{-1} \|_\infty$, iar $| \partial g_l / \partial \dot{u}_j | < b$ şi $| \partial f_l / \partial u_j | < a$, respectiv. În particular, pentru o singură ecuaţie (n = 1) de tipul (5), avem m = 1, $b = 2\zeta\omega$, $a = \omega^2$, şi rezultă:

$$h_c = \frac{-\zeta\gamma + \sqrt{\zeta^2\gamma^2 + \omega^2\beta}}{\omega^2\beta}.$$

Pentru ζ = 0, se regăseşte rezultatul din Newmark (1959), $h_c = 1/(\omega\sqrt{\beta})$.

3.1.3 Stabilitatea operatorului Newmark (stabilitatea liniară)

Vom urma, cu titlu de exerciţiu, idea tratării din Newmark (1959). Considerăm ecuaţia liniară de tipul (6)

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

şi formula (22) scrisă pentru i+1 şi pentru i. Avem:

$$u_{i+1} = u_i + h\dot{u}_i + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{u}_i + \beta h^2\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_i = u_{i-1} + h\dot{u}_{i-1} + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2\ddot{u}_{i-1} + \beta h^2\ddot{u}_i$$

Scăzând cele două relaţii, obţinem:

$$u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1} + h(\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}) + (\tfrac{1}{2} - \beta)h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}) + \beta h^2(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

Din (23) evaluăm:

$$h(\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i) = (1-\gamma)h^2\ddot{u}_i + \gamma h^2\ddot{u}_{i+1} = h^2\ddot{u}_{i-1} + \gamma h^2(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

Înlocuind, şi punând în evidenţă un termen în $(\gamma - \tfrac{1}{2})$, se obţine:

$$u_{i+1} = 2u_i - u_{i-1} - \beta h^2 \ddot{u}_{i+1} - \beta h^2 \ddot{u}_{i-1} - (1-2\beta) h^2 \ddot{u}_i - (\gamma - \tfrac{1}{2}) h^2 (\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1})$$

În fine, înlocuind din ecuaţia diferenţială $\ddot{u} = -\omega^2 u$, se obţine ecuaţia cu diferenţe:

$$u_{i+1} - (2-\alpha^2) u_i + u_{i-1} + (\gamma - \tfrac{1}{2}) \alpha^2 (u_i - u_{i-1}) = 0$$

în care:

$$\alpha^2 = \frac{h^2 \omega^2}{1 + \beta h^2 \omega^2}$$

Ţinând cont că $u_i - u_{i-1} \cong h \dot{u}_{i-1}$, ultimul termen din ecuaţia cu diferenţe de mai sus are forma unei forţe de amortizare $c\dot{u}$, introdusă artificial de metodă. Coeficientul de amortizare este proporţional cu $(\gamma - \tfrac{1}{2})$. Pentru a exclude aceasta, luăm $\gamma = \tfrac{1}{2}$ şi avem:

$$u_{i+1} - (2-\alpha^2) u_i + u_{i-1} = 0 \qquad (32)$$

Ecuaţia cu diferenţe (32) a fost întâlnită în 2.1.3 – ecuaţia (12). Ecuaţia caracteristică este (12') în care $x = \alpha$. Utilizând rezultatul din 2.1.3, pentru stabilitate trebuie să avem $\alpha \le 2$, care conduce la condiţiile:

$$\beta \ge \tfrac{1}{4}: \quad \forall h > 0$$

$$\beta < \tfrac{1}{4}: \quad h < \frac{2}{\omega\sqrt{1-4\beta}}$$

Coeficientul β se alege astfel că $\beta \le \tfrac{1}{4}$. Pentru $\beta = \tfrac{1}{4}$, metoda este stabilă pentru orice h şi se zice *necondiţionat stabilă*.

Marginea lui h se zice limita de stabilitate. Dacă punem $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (perioada), rezultă:

$$h_{stab} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-4\beta}} T$$

Sau

$$\frac{h_{stab}}{T} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-4\beta}}$$

Exemple:

β	Limita de stabilitate
1/6	0.5513T
1/8	0.4502T
1/12	0.3898T

■

Tratarea stabilităţii pentru ecuaţia cu amortizare (5) este mult mai complexă. Pentru aceasta se va utiliza metoda expusă mai jos, în 3.3. Vom da numai rezultatele numai pentru cazul de interes $\gamma \geq \frac{1}{2}$ (amortizare pozitivă):

$$\beta \geq \frac{\gamma}{2}: \quad \forall h \text{ (independent de } \zeta)$$

$$\beta < \frac{\gamma}{2}: \quad h < \frac{1}{\omega} x_2,$$

unde $x_2 = [\zeta(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\Delta}]/(\gamma/2 - \beta)$, $\Delta = \zeta^2(\gamma - \frac{1}{2})^2 + (\gamma/2 - \beta)^2$.

Adăugăm că, pentru $\zeta = 0$, operatorul este instabil dacă $\gamma < \frac{1}{2}$.

3.1.4 Eroarea de trunchiere locală

Considerăm cazul unei singure ecuaţii, rezultatele generalizându-se la un sistem. Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (24a, b), în care aproximaţiile $u_i, \dot{u}_i$, etc. se înlocuiesc cu valorile exacte $u(t_i), \dot{u}(t_i)$, etc.. Astfel, definim

$$u(t_{i+1}) = \bar{u}(t_i) + \beta h^2(\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T_{i+1}$$

$$\dot{u}(t_{i+1}) = \bar{\dot{u}}(t_i) + \gamma h(\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i)) + T'_{i+1}$$

în care $\bar{u}(t), \bar{\dot{u}}(t)$ sunt seriile Taylor trunchiate până la termenul în h^2. Avem:

$$u(t_{i+1}) - \bar{u}(t_i) = \frac{h^3}{6} u^{(3)}(\xi), \quad \dot{u}(t_{i+1}) - \bar{\dot{u}}(t_i) = \frac{h^2}{2} u^{(3)}(\xi'),$$

$$\ddot{u}(t_{i+1}) - \ddot{u}(t_i) = h u^{(3)}(\eta),$$

unde $\xi, \xi', \eta \in (t_i, t_{i+1})$. Rezultă:

$$T_{i+1} = h^3(\frac{1}{6}u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta)), \qquad T'_{i+1} = h^2(\frac{1}{2}u^{(3)}(\xi') - \gamma u^{(3)}(\eta))$$

Dacă $\gamma = \frac{1}{2}$, avem:

$$T'_{i+1} = \frac{h^2}{2}(u^{(3)}(\xi') - u^{(3)}(\eta)) = \frac{h^2}{2}(\xi' - \eta)u^{(4)}(\zeta')$$

unde $t_i < \zeta' < t_{i+1}$. Rezultă astfel (pentru $\gamma = \frac{1}{2}$):

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \qquad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1}, \tag{33a}$$

în care:

$$C_{i+1} = \frac{1}{6}u^{(3)}(\xi) - \beta u^{(3)}(\eta), \qquad C'_{i+1} = \frac{1}{2}\frac{(\xi' - \eta)}{h}u^{(4)}(\zeta') \tag{33b}$$

Punând $|u^{(3)}(t)| \le M_3$, $\quad |u^{(4)}(t)| \le M_4$, avem:

$$|C_{i+1}| \le (\tfrac{1}{6} + \beta)M_3, \qquad |C'_{i+1}| \le \tfrac{1}{2}M_4 \tag{33c}$$

În particular, dacă $\beta = \frac{1}{6}$, se obţine

$$T_{i+1} = h^4 C_{i+1}, \tag{33d}$$

$$C_{i+1} = \frac{1}{6}u^{(4)}(\zeta), \qquad |C_{i+1}| \le \frac{1}{6}M_4 \tag{33e}$$

unde $t_i < \zeta < t_{i+1}$.

Rezultă:

$$T_{i+1} = O(h^3), \qquad T'_{i+1} = O(h^3).$$

În particular, pentru $\beta = \frac{1}{6}$, se obţine $T_{i+1} = O(h^4)$.

3.1.5 Eroarea de trunchiere globală şi ordin

Considerăm în ceea ce urmează, cazul $\gamma = \frac{1}{2}$. Avem, conform (33a),

$$T_{i+1} = h^3 C_{i+1}, \qquad T'_{i+1} = h^3 C'_{i+1},$$

unde C_{i+1}, C'_{i+1} sunt mărginiţi ca în (33c) sau (33e).

Definim eroarea de trunchiere globală prin:

$$e_i = u(t_i) - u_i\,, \qquad e'_i = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i\,, \qquad e''_i = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i \tag{34}$$

Pentru $i = 0$, se pune prin definiţie – v. 1: $u_0 = u(t_0), u'_0 = u'(t_0)$ şi $u''_0 = u''(t_0)$, astfel că avem:

$$e_0 = 0\,,\ e'_0 = 0\,,\ e''_0 = 0\,. \tag{35}$$

Utilizând (23), eroarea de trunchiere globală e_{i+1}, se scrie:

$$e_{i+1} = u(t_{i+1}) - [u_i + h\dot{u}_i + h^2(\tfrac{1}{2} - \beta)\ddot{u}_i + h^2\beta\ddot{u}_{i+1}]$$

sau

$$\begin{aligned}e_{i+1} &= u(t_{i+1}) - [u(t_i) + h\dot{u}(t_i) + h^2(\tfrac{1}{2} - \beta)\ddot{u}(t_i) + h^2\beta\ddot{u}(t_{i+1})] \\ &+ [u(t_i) + h\dot{u}(t_i) + h^2(\tfrac{1}{2} - \beta)\ddot{u}(t_i) + h^2\beta\ddot{u}(t_{i+1})] - [u_i + h\dot{u}_i + h^2(\tfrac{1}{2} - \beta)\ddot{u}_i + h^2\beta\ddot{u}_{i+1}]\end{aligned}$$

Prima diferenţă din membrul doi este T_{i+1}, astfel că rezultă:

$$e_{i+1} = T_{i+1} + e_i + he'_i + h^2(\tfrac{1}{2} - \beta)e''_i + h^2\beta e''_{i+1} \tag{36}$$

Cu (24), eroarea e'_{i+1} este:

$$e'_{i+1} = \dot{u}(t_{i+1}) - [\dot{u}_i + h(1-\gamma)\ddot{u}_i + h\gamma\ddot{u}_{i+1}]$$

şi analog, se deduce:

$$e'_{i+1} = T'_{i+1} + e'_i + h(1-\gamma)e''_i + h\gamma e''_{i+1} \tag{37}$$

Pentru eroarea e''_i, considerăm ecuaţia diferenţială (1) pentru $n = 1$, sub forma

$$\ddot{u} + g(\dot{u}) + f(u) = p(t)\,,$$

(adică (15) împărţită cu m, şi punând: $g/m \mapsto g,\ f/m \mapsto f,\ p/m \mapsto p$), şi avem:

$$\ddot{u}(t_i) + g(\dot{u}(t_i)) + f(u(t_i)) = p(t_i)$$

$$\ddot{u}_i + g(\dot{u}_i) + f(u_i) = p(t_i)$$

Scăzând aceste ecuaţii rezultă:

$$e''_i + [g(\dot{u}(t_i)) - g(\dot{u}_i)] + [f(u(t_i)) - f(u_i)] = 0$$

Sau, cu

$$g(\dot{u}(t_i)) - g(\dot{u}_i) = G_i e_i', \quad G_i = g'(\mu_i')$$

$$f(u(t_i)) - f(u_i) = F_i e_i, \quad F_i = f'(\mu_i)$$

în care μ_i' este între $\dot{u}(t_i)$ şi $\dot{u}_i$, iar μ_i este între $u(t_i)$ şi u_i, rezultă:

$$e_i'' + G_i e_i' + F_i e_i = 0 \tag{38}$$

În particular, pentru o ecuaţie liniară (5) avem: $G_i = 2\zeta\omega$, $F_i = \omega^2$.

Observaţie: Cu $e_0 = 0$, $e_0' = 0$, se verifică $e_0'' = 0$ - v. (35) ■

Pentru relaţia dintre e_{i+1}'' şi e_i'' înlocuim (36, 37) în (38) scrisă pentru i+1:

$$e_{i+1}'' + G_{i+1} e_{i+1}' + F_{i+1} e_{i+1} = 0,$$

şi ţinând cont de (32) rezultă:

$$\begin{aligned} &e_{i+1}''(1 + h\gamma G_{i+1} + h^2 \beta F_{i+1}) + e_i''[h(1-\gamma)G_{i+1} + h^2(\tfrac{1}{2} - \beta)F_{i+1}] \\ &+ h^3(G_{i+1}C_{i+1}' + F_{i+1}C_{i+1}) + F_{i+1}e_i + (G_{i+1} + hF_{i+1})e_i' = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

- Pasul 1 (i = 0):

Cu (35), din (39) avem:

$$e_1''(1 + h\gamma G_1 + h^2 \beta F_1) + h^3(G_1 C_1' + F_1 C_1) = 0$$

Împărţind cu coeficientul lui e_1'' şi utilizând $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots$, rezultă:

$$e_1'' = -h^3(G_1 C_1' + F_1 C_1) + h^4(\ldots) = 0$$

sau

$$e_1'' = h^3 A_1'' + h^4 B_1; \quad A_1'' = -(G_1 C_1' + F_1 C_1)$$

Apoi, din (38) şi (37) rezultă, respectiv:

$$e_1' = h^3 A_1' + h^4 B_1'; \quad A_1' = C_1'$$

$$e_1 = h^3 A_1 + h^4 B_1; \quad A_1 = C_1$$

- Pasul 2 (i = 1):

Din (39) avem:

$$e_2''(1+h\gamma G_2+h^2\beta F_2)+e_1''[(1-\gamma)G_2+h(\tfrac{1}{2}-\beta)F_2]$$
$$+h^3(G_2C_2'+F_2C_2)+F_2e_1+(G_2+hF_2)e_1'=0$$

şi, cu rezultatele de la Pasul 1, rezultă:

$$e_2''=h^3A_2''+h^4B_2;\quad A_2''=-(G_2C_2'+F_2C_2+G_2C_1'+F_2C_1)$$

Analog cu pasul 1, avem din (38, 37):

$$e_2'=h^3A_2'+h^4B_2';\quad A_2'=C_2'+C_1'$$

$$e_2=h^3A_2+h^4B_2;\quad A_2=C_2+C_1$$

Prin inducţie asupra lui *i* se demonstrează următoarea propoziţie:

Propoziţia 1

Dacă $\gamma=\frac{1}{2}$, avem:

$$e_i=h^3A_i+h^4B_i,\qquad e_i'=h^3A_i'+h^4B_i', \tag{41}$$

unde

$$A_i=\sum_{j=1}^{i}C_j,\qquad A_i'=\sum_{j=1}^{i}C_j', \tag{42}$$

iar C_j, C_j' sunt definiţi de (33b-e) ■

Propoziţia 1 conduce imediat la următoarea concluzie:

Propoziţia 2

Metoda Newmark cu $\gamma=\frac{1}{2}$ converge, şi ordinul metodei este $p = 2$ ■

Din (41), (42) şi (32a, b) rezultă că avem:

$$|e_i|\le h^3\sum_{j=1}^{i}|C_j|+h^4|B_i|\le h^3 i(\tfrac{1}{2}+\beta)M_3+h^4B \tag{47}$$

$$|e_i'|\le h^3\sum_{j=1}^{i}|C_j'|+h^4|B_i'|\le h^3 i\tfrac{1}{2}M_4+h^4B' \tag{48}$$

unde $|B_i|\le B$ şi $|B_i'|\le B'$.

Pentru convergenţă considerăm limita soluţiei calculate $u_i, \dot{u}_i$, pentru $h \to 0$ şi $ih = c$ = constant. Din (47, 48) rezultă că avem $|e_i| \to 0, |e'_i| \to 0$ şi că, pentru ih = constant, $e_i = O(h^2), e'_i = O(h^2)$, care arată că ordinul metodei este $p = 2$ ■

Observaţii

1) Dacă $\gamma \neq \frac{1}{2}$, atunci:

În (32) avem $T_{i+1} = h^3 C_{i+1}$, însă $T'_{i+1} = h^2 C'_{i+1}$, $|C'_{i+1}| \leq (\frac{1}{2} + \gamma) M_3$.

Propoziţia 1 se modifică cum urmează: A doua relaţie din (41) se modifică, astfel că (41) devine

$$e_i = h^3 A_i + h^4 B_i, \quad e'_i = h^2 A'_i + h^3 B'_i, \tag{49}$$

iar (42) se menţine. Rezultă că avem (47), dar în loc de (48) avem:

$$|e'_i| \leq h^2 i(\gamma + \tfrac{1}{2}) M_3 + h^3 B'_i = hc(\gamma + \tfrac{1}{2}) M_3 + h^3 B'_i$$

Astfel, pentru $h \to 0$ şi $ih = c$ (constant), avem $|e_i| \to 0, |e'_i| \to 0$, deci metoda converge. Avem $e_i = O(h^2)$, dar $e'_i = O(h)$, astfel că ordinul global de convergenţă (pentru vectorul $[u_i \ \ \dot{u}_i]^T$) este $p = 1$. Putem spune că, convergenţa în deplasări este pătratică, însă în viteze este liniară.

2) Dacă $\beta = \frac{1}{6}$, avem: $e_i = h^4 A_i + h^5 B_i$; $\quad A_i = \sum_{j=1}^{i} C_j + \sum_{j=1}^{i-1} C'_j$. Pentru $ih = constant$ rezultă $e_i = O(h^3)$, dar $e'_i = O(h^2)$ şi astfel, ordinul global al metodei rămâne $p = 2$ ■

Operatorul în forma multi-pas. Ordinul 4.

Operatorul Newmark se poate pune în forma multi-pas, cum urmează. Pentru convenienţă, scriem ecuaţia diferenţială sub forma:

$$\ddot{u} = \varphi(u, \dot{u}, t)$$

şi notăm: $\ddot{u}_0 = \varphi_0 = \varphi(u_0, \dot{u}_0, t_0)$, $\ddot{u}_1 = \varphi_1 = \varphi(u_1, \dot{u}_1, t_1)$. Formulele Newmark devin:

$$u_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2} h^2 \varphi_0 + \beta h^2 (\varphi_1 - \varphi_0)$$
$$\dot{u}_1 = \dot{u}_0 + h\varphi_0 + \gamma h(\varphi \ \ - \varphi_0)$$

Se consideră şi

$$u_2 = u_1 + h\dot{u}_1 + \tfrac{1}{2}h^2\varphi_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Din acestea, avem:

$$u_1 - u_0 = h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\varphi_0 + \beta h^2(\varphi_1 - \varphi_0)$$

$$u_2 - u_1 = h\dot{u}_1 + \tfrac{1}{2}h^2\varphi_1 + \beta h^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\dot{u}_1 - \dot{u}_0 = h\varphi_0 + \gamma h(\varphi \quad - \varphi_0)$$

Scăzând prima relaţie din a doua, şi înlocuind $\dot{u}_1 - \dot{u}_0$, rezultă

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2[\beta\varphi_2 + (\tfrac{1}{2} - 2\beta + \gamma)\varphi_1 + (\tfrac{1}{2} + \beta - \gamma)\varphi_0] \qquad \text{(a)}$$

Analog, cu $\dot{u}_2 - \dot{u}_1 = h\varphi_1 + \gamma h(\varphi_2 - \varphi_1)$, se obţine:

$$\dot{u}_2 - 2\dot{u}_1 + \dot{u}_0 = h[\gamma\varphi_2 + (1 - 2\gamma)\varphi_1 + (\gamma - 1)\varphi_0]. \qquad \text{(b)}$$

În cazul fără amortizare, ecuaţia este

$$\ddot{u} = \varphi(u, t)$$

şi se poate utiliza numai ecuaţia (a).

Propoziţia 3

Dacă nu există amortizare ($g(\dot{u}) = 0$), metoda Newmark cu $\gamma = \tfrac{1}{2}$, şi $\beta = 1/12$, are ordinul $p = 4$ ■

Metoda cu $\beta = 1/12$ se mai zice formula Fox-Goodwin.

Pentru a proba concluzia, se consideră condiţiile de ordin pentru operatori multi-pas pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul doi *care nu conţine amortizare*, (v. Hairer et al., 1987), şi anume:

$$d_0 = \sum_{l=0}^{k} a_l = 0 \qquad (q=0)$$

$$d_1 = \sum_{l=0}^{k} l a_l - \sum_{l=0}^{k} b_l = 0 \qquad (q=1)$$

$$d_q = \sum_{l=0}^{k} l^q a_l - q(q-1)\sum_{l=0}^{k} l^{q-2} b_l = 0, \qquad q = 2,\dots, p+1$$

$$d_{p+2} = \sum_{l=0}^{k} l^{p+2} a_l - (p+2)(p+1)\sum_{l=0}^{k} l^{p} b_l \neq 0 \quad (q = p+2)$$

Ordinul operatorului (6) este numărul natural *p* pentru care avem

$$d_0 = 0,\ d_1 = 0, \dots,\ d_{p+1} = 0 \text{ şi } d_{p+2} \neq 0.$$

Ele asigură că formula pentru *u* este exactă pentru un polinom de grad p , şi nu mai este exactă pentru un polinom de grad $p+1$.

Astfel, pentru operatorul (a), punem condiţia ca relaţiile să fie verificate pentru $q = 0,1,\dots,5$. Din acestea rezultă $\gamma = \frac{1}{2}$ şi $\beta = \frac{1}{12}$; relaţia pentru $q = 6$ nu mai este verificată. Rezultă că ordinul este $p = 4$.

Obsevaţie

Operatorul cu $\gamma = \frac{1}{2}$ este:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2[\beta\varphi_2 + (1-2\beta)\varphi_1 + \beta\varphi_0]$$

În particular, pentru $\beta = 1/12$, aceasta devine:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = \frac{h^2}{12}[\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0]$$

(Acesta este metoda Numerov.)

■

2.2 Un operator de ordinul trei (generalizarea operatorului Newmark)

O familie de noi operatori, care generalizează operatorul Newmark a fost introdusă de autor – v. Chisăliţă A. & Chisăliţă F. (1990, 1998).

Formulele operatorului

Notăm, pentru simplificare, pasul curent şi anterior cu indicii 1 şi 0, respectiv (în loc de i+1 şi i). Presupunem că funcţia u satisface pe intervalul $I = [t_0, t_1],\ t_1 = t_0 + h$, una din următoarele condiţii:

(1) $\ddot{u}$ e derivabilă în $I - \{t_0\}$;

(2) $\ddot{u}$ e continuă în t_0 şi există $\dddot{u}$, finită sau nu, în $I - \{t_0\}$.

Atunci, pentru orice întregi pozitivi p, p' şi p'', seria Taylor a funcţiilor u, $\dot{u}$ şi $\ddot{u}$, cu restul în forma Schlömilch-Roche (v. Nicolescu (1958)), este:

$$u(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0) + \beta h^3\dddot{u}(t_0 + \theta h) \tag{50a}$$

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0) + \gamma h^2\dddot{u}(t_0 + \theta' h) \tag{50b}$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta h\dddot{u}(t_0 + \theta'' h) \tag{50c}$$

în care $\theta,\ \theta'$ şi $\theta'' \in (0,1)$ şi sunt asociaţi cu p, p' and p'', respectiv, şi cu t_0, iar coeficienţii β, γ şi δ sunt daţi de:

$$\beta = \frac{(1-\theta)^{3-p}}{2p}, \quad \gamma = \frac{(1-\theta')^{2-p'}}{p'}, \quad \delta = \frac{(1-\theta'')^{1-p''}}{p''} \tag{51}$$

Dacă notăm cu $\bar{u}$ şi $\bar{\dot{u}}$ seriile Taylor trunchiate din (50a, b), adică:

$$\bar{u}(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0)$$

$$\bar{\dot{u}}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0),$$

ecuaţiile (50) devin:

$$u(t_1) = \bar{u}(t_1) + \beta h^3\dddot{u}(t_0 + \theta h) \tag{52a}$$

$$\dot{u}(t_1) = \bar{\dot{u}}(t_1) + \gamma h^2\dddot{u}(t_0 + \theta' h) \tag{52b}$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta h\dddot{u}(t_0 + \theta'' h) \tag{52c}$$

Ecuaţiile (52 a-c) reprezintă formulele generale pentru a deduce operatori de integrare directă. Aceasta se va face introducând ipoteze asupra variaţiei $\dddot{u}$ pe intervalul $[t_0, t_1]$.

a) Operatorul Newmark

Să presupunem că

A1 | $\ddot{u}(t)$ = *constant*, pe $I = [t_0, t_1]$.

Atunci, notând

$$\Delta\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0), \tag{53}$$

avem

$$\dddot{u}(t) = \Delta\ddot{u}(t_1)/h. \tag{53'}$$

Formulele operatorului Newmark se obţin din (52), scrise cu ipoteza (53'), şi punând valorile calculate $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$, în locul celor exacte $u(t_i), \dot{u}(t_i), \ddot{u}(t_i)$. Pentru compatibilitate cu ipoteza A1, luăm δ = 1 în (52c). Această valoare corespunde la alegerea p'' = 1 în (51). Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^2 \Delta\ddot{u}_1 \tag{54a}$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h \Delta\ddot{u}_1 \tag{54b}$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \Delta\ddot{u}_1 \tag{54c}$$

în care, funcţiile barate sunt seriile Taylor trunchiate (scrise cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}_0, \qquad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0. \tag{54d}$$

Coeficienţii β and γ sunt definiţi de (51) şi diferite alegeri ale lui p şi p' conduc la diferite metode Newmark. De exemplu, pentru p = 3 şi p' = 2, se obţine metoda cu $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, fără a mai fi nevoie de estimarea lui θ şi θ'.

Este de notat că pasul h trebuie să fie suficient de mic pentru ca ipoteza A1 să fie satisfăcută. De asemenea, după deducerea precedentă, toate metodele Newmark rezultă din ipoteza A1, echivalentă cu variaţia liniară a acceleraţiei în intervalul I.

b) Un nou operator

Presupunem că

A2 | $\ddot{u}(t)$ variază *liniar* pe intervalul $I = [t_0, t_1]$

Notând

$$\Delta\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_1) - \ddot{u}(t_0)\,, \tag{55}$$

ipoteza A2 conduce la

$$\ddot{u}(t_0 + \theta\Delta t) = \ddot{u}(t_0) + \theta\Delta\ddot{u}(t_1) \tag{55'}$$

Formulele operatorului se obţin din (52), cu ipoteza (55'), şi înlocuind valorile exacte cu cele calculate. Rezultă:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \beta h^3 \ddot{u}_0 + \theta\beta h^3 \Delta\ddot{u}_1 \tag{56a}$$

$$\dot{u}_1 = \bar{\dot{u}}_1 + \gamma h^2 \ddot{u}_0 + \theta'\gamma h^2 \Delta\ddot{u}_1 \tag{56b}$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \delta h \ddot{u}_0 + \theta''\delta h \Delta\ddot{u}_1 \tag{56c}$$

$$\ddot{u}_1 = \ddot{u}_0 + \Delta\ddot{u}_1 \tag{56d}$$

în care funcţiile barate reprezintă seriile Taylor trunchiate (cu valorile calculate), adică:

$$\bar{u}_1 = u_0 + h\dot{u}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}_0, \qquad \bar{\dot{u}}_1 = \dot{u}_0 + h\ddot{u}_0\,. \tag{56e}$$

Coeficienţii β, γ, δ şi θ, θ', θ'' se vor alege din condiţia ca eroarea formulelor (56 a-d) să fie minimizată.

Formulele pentru un sistem:

$$\mathbf{U}_1 = \overline{\mathbf{U}}_1 + \beta h^3 \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta\beta h^3 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57a}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_1 = \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma h^2 \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta'\gamma h^2 \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57b}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta h \ddot{\mathbf{U}}_0 + \theta''\delta h \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57c}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \Delta\ddot{\mathbf{U}}_1 \tag{57d}$$

în care:

$$\overline{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_0 + h\dot{\mathbf{U}}_0 + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{\mathbf{U}}_0\,, \qquad \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \dot{\mathbf{U}}_0 + h\ddot{\mathbf{U}}_0\,. \tag{57e}$$

Integrarea ecuaţiei (1, 2)

Fie ecuaţia (1),

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{g}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t)$$

cu condiţiile iniţiale $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(t_0), \dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{U}}(t_0)$. Acestea, înlocuite în ecuaţia scrisă pentru $t = t_0$, conduc la

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{P}(t_0),$$

din care se determină $\ddot{\mathbf{U}}_0 = \ddot{\mathbf{U}}(t_0)$. Considerând ecuaţia (1) *derivată*, şi scrisă pentru $t = t_0$, rezultă

$$\mathbf{M}\dddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{C}(\mathbf{U}_0, \dot{\mathbf{U}}_0)\ddot{\mathbf{U}}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0)\dot{\mathbf{U}}_0 = \dot{\mathbf{P}}(t_0),$$

din care se determină $\dddot{\mathbf{U}}_0 = \dddot{\mathbf{U}}(t_0)$. S-au notat: **B** şi **C**, jacobienii lui **g** în raport cu **U** şi $\dot{\mathbf{U}}$, respectiv; **A** este jacobianul lui **f**; v. (29b).

Pentru un sistem liniar (2), avem $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, **C** = constant, **A** = **K** (constant).

Considerăm ecuaţia (1) scrisă pentru momentul $t_1 = t_0 + h$:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_1) = \mathbf{P}(t_1) \qquad (60)$$

şi înlocuim $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1$ din (57). Notând, pentru claritate, $\mathbf{W} = \Delta\dddot{\mathbf{U}}_1$, se obţine ecuaţia neliniară:

$$\mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{0} \qquad (61a)$$

unde:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{W}) = {} & \mathbf{M}\theta''\delta h\mathbf{W} + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}, \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W}) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W}) \\ & + \mathbf{M}\cdot\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 - \mathbf{P}(t_1)\end{aligned} \qquad (61b)$$

În (60c) s-au pus:

$$\tilde{\mathbf{U}}_1 = \overline{\mathbf{U}}_1 + \beta(\Delta t)^3\dddot{\mathbf{U}}_0 \qquad (62a)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 = \overline{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \gamma(\Delta t)^2\dddot{\mathbf{U}}_0 \qquad (62b)$$

$$\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 = \ddot{\mathbf{U}}_0 + \delta(\Delta t)\dddot{\mathbf{U}}_0 \qquad (62c)$$

Ecuaţia (61) se rezolvă cu metoda Newton, iteraţia fiind definită de

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}^{(n+1)} = \mathbf{W}^{(n)} + \delta_{n+1}; \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{0}\\ &\mathbf{J}(\mathbf{W}^{(n)})\delta_{n+1} = -\mathbf{F}(\mathbf{W}^{(n)})\end{aligned} \tag{63a}$$

în care $\mathbf{J}(\mathbf{W}) = [\partial F_i / \partial W_j]$ este jacobianul lui **F**, dat de:

$$\begin{aligned}&\mathbf{J}(\mathbf{W}) = \mathbf{M}\theta''\delta h + \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W},\ \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta\beta h^3\\ &+ \mathbf{C}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W},\ \tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \theta'\gamma h^2\mathbf{W})\theta'\gamma h^2 + \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{U}}_1 + \theta\beta h^3\mathbf{W})\theta\beta h^3\end{aligned} \tag{63b}$$

Iteraţia se încheie prin testele:

$$\|\boldsymbol{\delta}_n\| \le \varepsilon \quad \text{şi} \quad \textit{Număr de iteraţii} \le \textit{LNIT} \tag{64}$$

unde ε and *LNIT* sunt alese dinainte.

Cu $\mathbf{W} = \Delta\dddot{\mathbf{U}}_1$ găsită ca mai sus, din (57 a-d) se calculează valorile $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1, \ddot{\mathbf{U}}_1, \dddot{\mathbf{U}}_1$, care sunt luate ca valori iniţiale pentru pasul următor.

În particular, pentru un sistem liniar (2) ecuaţia (60) devine liniară în **W**, şi anume:

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{W} = \hat{\mathbf{P}},$$

unde

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\theta''\delta h + \mathbf{C}\theta'\gamma h^2 + \mathbf{K}\theta\beta h^3,$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}(t_1) - (\mathbf{M}\tilde{\ddot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{C}\tilde{\dot{\mathbf{U}}}_1 + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}_1).$$

Eroarea de trunchiere locală şi alegerea coeficienţilor

Eroarea de trunchiere locală este eroarea formulelor (57) când valorile calculate se înlocuiesc cu cele exacte. Astfel, avem:

- Eroarea în *u*:

Din (56a) se obţine, notând eroarea de trunchiere cu T_1:

$$u(t_1) = \bar{u}(t_1) + \beta h^3 \dddot{u}(t_0) + \theta\beta h^3[\dddot{u}(t_1) - \dddot{u}(t_0)] + T_1$$

în care, avem:

$$\dddot{u}(t_1) - \dddot{u}(t_0) = hu^{(4)}(\xi), \quad t_0 < \xi < t_1. \tag{65}$$

Desvoltând $u(t_1)$ în serie Taylor, până la termenul de ordinul 4, avem:

$$u(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \tfrac{1}{2}h^2\ddot{u}(t_0) + \tfrac{1}{6}h^3\dddot{u}(t_0) + \tfrac{1}{24}h^4u^{(4)}(\eta)$$

unde $t_0 < \eta < t_1$. Cum primii trei termeni din membrul doi sunt $\bar{u}(t_1)$, rezultă:

$$T_1 = h^3(\tfrac{1}{6} - \beta)\dddot{u}(t_0) + h^4[\tfrac{1}{24}u^{(4)}(\eta) - \theta\beta u^{(4)}(\xi)]$$

Pentru a obţine cel mai înalt ordin în T_1, alegem:

$$\beta = \tfrac{1}{6}; \quad \theta\beta = \tfrac{1}{24} \quad \Rightarrow \theta = \tfrac{1}{4}, \tag{66}$$

Presupunând că există $u^{(5)}$, avem $u^{(4)}(\eta) - u^{(4)}(\xi) = (\eta - \xi)u^{(5)}(\zeta)$, unde $t_0 < \zeta < t_1$. Punând

$$C_1 = \frac{\eta - \xi}{h}u^{(5)}(\zeta)$$

obţinem:

$$T_1 = h^5C_1 \tag{66'}$$

Notând cu M_5 marginea lui $u^{(5)}$ pe intervalul $[t_0, t_1]$, adică

$$|u^{(5)}(t)| < M_5, \qquad t \in [t_0, t_1]$$

şi ţinând cont că $|\eta - \xi|/h < 1$, rezultă că avem:

$$|C_1| < \tfrac{1}{24}M_5 \tag{66''}$$

- Eroarea în $\dot{u}$:

Notând eroarea de trunchiere cu T_1', din (56b) se obţine, ţinând cont de (65):

$$\dot{u}(t_1) = \bar{\dot{u}}(t_1) + \gamma h^2\dddot{u}(t_0) + \theta'\gamma h^3u^{(4)}(\xi) + T_1'$$

Analog, desvoltăm membrul întâi în serie Taylor până la termenul de ordinul trei,

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_0) + h\ddot{u}(t_0) + \tfrac{1}{2}h^2\dddot{u}(t_0) + \tfrac{1}{6}h^3u^{(4)}(\eta'),$$

şi rezultă:

$$T_1' = h^3(\tfrac{1}{2} - \gamma)\dddot{u}(t_0) + h^3[\tfrac{1}{6}u^{(4)}(\eta') - \theta'\gamma u^{(4)}(\xi)]$$

Pentru a obţine cel mai mare ordin în T_1', alegem:

$$\gamma = \tfrac{1}{2}; \quad \theta'\gamma = \tfrac{1}{6} \quad \Rightarrow \theta' = \tfrac{1}{3}, \tag{67}$$

şi avem $u^{(4)}(\eta') - u^{(4)}(\xi) = (\eta_2' - \xi)u^{(5)}(\zeta')$, unde $t_0 < \zeta' < t_1$. Punem

$$C_1' = \frac{\eta' - \xi}{h} u^{(5)}(\zeta')$$

şi eroarea T_1' devine:

$$T_1' = h^4 C_1' \tag{67'}$$

unde

$$|C_1'| < \tfrac{1}{6} M_5 \tag{67''}$$

- Eroarea în $\ddot{u}$:

În mod analog, din (57c) şi seria Taylor a lui $\ddot{u}(t_1)$, avem:

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + \delta h \dddot{u}(t_0) + \theta''\delta h^2 u^{(4)}(\xi) + T_1'',$$

$$\ddot{u}(t_1) = \ddot{u}(t_0) + h\dddot{u}(t_0) + h^2 \tfrac{1}{2} u^{(4)}(\eta''),$$

de unde rezultă:

$$T_1'' = h(1-\delta)\dddot{u}(t_0) + h^2[\tfrac{1}{2} u^{(4)}(\eta'') - \theta''\delta u^{(4)}(\xi)]$$

Cu alegerea

$$\delta = 1; \quad \theta''\delta = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \theta'' = \tfrac{1}{2}, \tag{68}$$

rezultă $u^{(4)}(\eta'') - u^{(4)}(\xi) = (\eta'' - \xi)u^{(5)}(\zeta'')$, unde $t_0 < \zeta'' < t_1$. Punând

$$C_1'' = \frac{\eta'' - \xi}{h} u^{(5)}(\zeta'')$$

eroarea T_1'' ia forma

$$T_1'' = h^3 C_1'' \tag{68'}$$

unde

$$|C_1'| < \tfrac{1}{2} M_5 \tag{68''}$$

Eroarea de trunchiere globală şi ordin

Revenind la pasul general $i \geq 1$, rezultatele anterioare (66'-68') se scriu:

$$\begin{aligned} T_i &= h^5 C_i, \quad |C_i| < \tfrac{1}{24} M_5 \\ T_i' &= h^4 C_i', \quad |C_i'| < \tfrac{1}{6} M_5 \\ T_i'' &= h^3 C_i'', \quad |C_i''| < \tfrac{1}{2} M_5 \end{aligned} \tag{69}$$

unde $|u^{(5)}(t)| < M_5$, $t \in [t_0, TT]$.

Definim eroarea de trunchiere globală prin:

$$e_i = u(t_i) - u_i\,;\ e_i' = \dot{u}(t_i) - \dot{u}_i\,;\ e_i'' = \ddot{u}(t_i) - \ddot{u}_i\,;\ e_i''' = \dddot{u}(t_i) - \dddot{u}_i \tag{70}$$

Întrucât valorile iniţiale $u_0, \dot{u}_0, \ddot{u}_0, \dddot{u}_0$, ale soluţiei calculate, se iau egale cu cele exacte – v. 3.3.2, avem:

$$e_0 = 0, \quad e_0' = 0, \quad e_0'' = 0, \quad e_0''' = 0 \tag{70'}$$

Cu $\beta = \frac{1}{6}, \beta\theta = \frac{1}{24};\ \ \gamma = \frac{1}{2}, \theta'\gamma = \frac{1}{6};\ \ \delta = 1, \theta''\delta = \frac{1}{2}$, formulele (56) ale operatorului devin:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + h\dot{u}_i + \frac{h^2}{2}\ddot{u}_i + \frac{h^3}{8}\dddot{u}_i + \frac{h^3}{24}\dddot{u}_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + h\ddot{u}_i + \frac{h^2}{3}\dddot{u}_i + \frac{h^2}{6}\dddot{u}_{i+1} \\ \ddot{u}_{i+1} &= \ddot{u}_i + \frac{h}{2}\dddot{u}_i + \frac{h}{2}\dddot{u}_{i+1} \end{aligned} \tag{71}$$

Procedând ca la operatorul Newmark, se obţine:

$$e_i''' = h^2 A_i''' + h^3 B_i''' \tag{78a}$$

$$e_i'' = h^4 B_i'' \tag{78b}$$

$$e_i' = h^4 A_i' + h^5 B_i' \tag{78c}$$

$$e_i = h^5 A_i + h^6 B_i \tag{78d}$$

Relaţiile (78) conduc la următoarea propoziţie:

Propoziţia 1

Operatorul cu coeficienţii $\beta=\frac{1}{6}, \theta=\frac{1}{4}$; $\gamma=\frac{1}{2}, \theta'=\frac{1}{3}$; $\delta=1, \theta''=\frac{1}{2}$, are ordinul $p=3$ ■

Propoziţia 1 se demonstrează arătând că pentru $ih = c$ = constant, rezultă:

$$e_i' = O(h^3) \qquad (*)$$

$$e_i = O(h^3) \qquad (**)$$

■

Observaţie

Cu (*) şi (**), rezultă şi: $e_i'' = O(h^3)$; $e_i''' = O(h)$.

■

Cazul fără amortizare. Ordinul 4.

Propoziţia 2

Dacă nu există amortizare, operatorul cu coeficienţii $\beta=\frac{1}{6}$, $\theta=\frac{1}{4}$; $\gamma=\frac{1}{2}$, $\theta'=\frac{1}{3}$ şi $\delta=1$, $\theta''=\frac{1}{2}$, are ordinul $p=4$ ■

Aceasta se probează punând operatorul sub forma multi-pas, şi anume, se obţine:

$$u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2 \frac{1}{12}[\varphi_2 + 10\varphi_1 + \varphi_0].$$

Formula coincide cu cea a operatorului Newmark, pentru $\gamma=\frac{1}{2}$ şi $\beta=\frac{1}{12}$.

■

Stabilitatea operatorului (stabilitatea liniară)

Tratăm stabilitatea pentru sistemul liniar (2) şi presupunem că aceasta se decuplează în forma (5). Aceasta revine la a discuta stabilitatea pentru o singură ecuaţie de forma

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = p(t) \qquad (80)$$

Forma matriceală a operatorului

Să notăm cu

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} u(t) & \dot{u}(t) & \ddot{u}(t) & \ddot{u}(t) \end{bmatrix}^T \tag{81}$$

Formulele operatorului – ecuaţiile (57) – iau forma

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{S}_0\mathbf{X}_0 + \mathbf{R}_0\Delta\ddot{u}_1 \tag{82a}$$

unde

$$\mathbf{S}_0 = \begin{bmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h^2 & h^3\beta \\ 0 & 1 & h & h^2\gamma \\ 0 & 0 & 1 & h\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{82b}$$

şi

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \beta' h^3 & \gamma' h^2 & \delta' h & 1 \end{bmatrix}^T \tag{82c}$$

În (82c) s-a notat

$$\beta' = \beta\theta, \ \ \gamma' = \gamma\theta', \ \ \delta' = \delta\theta'' \tag{82d}$$

Ecuaţia (80) se pune în forma matricelă

$$\mathbf{EX} = p(t) \tag{83}$$

unde:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \omega^2 & 2\zeta\omega & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerând acum (83) scrisă pentru $t = t_1$ şi punând $p_1 = p(t_1)$, rezultă $\mathbf{EX}_1 = p_1$, şi înlocuind din (82a) rezultă

$$\mathbf{ES}_0\mathbf{X}_0 + \mathbf{ER}_0\Delta\ddot{u}_1 = p_1 \tag{84}$$

Calculând produsul $\mathbf{ER}_0$ avem

$$\mathbf{ER}_0 = ah,$$

unde

$$a = \beta' x^2 + 2\zeta\gamma' x + \delta'; \qquad x = \omega h = 2\pi(h/T). \tag{85}$$

$T = 2\pi/\omega$ notează perioada răspunsului fără amortizare.

Rezolvând (84) în raport cu $\Delta\ddot{u}_1$ se obţine $\Delta\ddot{u}_1 = (p_1 - \mathbf{ES}_0\mathbf{X}_0)/ah$ care, substituită în (81a) conduce la ecuaţia matriceală a operatorului:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{S}\mathbf{X}_0 + \mathbf{R}p_1 \tag{86}$$

S-a notat:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 /(ah)$$

Matricea **S** a operatorului este dată de

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 - \mathbf{RES}_0 \tag{87}$$

Calculând **S** şi aplicându-i transformarea de similaritate de finită de

$$\mathbf{S}' = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{D}, \qquad \mathbf{D} = diag[h^{4-i}]_{i=1,4} \tag{88}$$

obţinem următoarea structură a matricii **S**':

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} 1-\beta' c_1 & 1-\beta' c_2 & \frac{1}{2}-\beta' c_3 & \beta-\beta' c_4 \\ -\gamma' c_1 & 1-\gamma' c_2 & 1-\gamma' c_3 & \gamma-\gamma' c_4 \\ -\delta' c_1 & \delta' c_2 & 1-\delta' c_3 & \delta-\delta' c_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 1-c_4 \end{bmatrix} \tag{89}$$

Coeficienţii c_i sunt definiţi de:

$$c_1 = x^2/a\,,\ c_2 = (x^2 + 2\zeta x)/a\,,\ c_3 = (x^2 + 2\zeta x + 1)/a\,,$$

$$c_4 = (\beta x^2 + 2\zeta x + \delta)/a \tag{89a}$$

Criteriul de stabilitate

Considerăm formula de recurenţă (86) scrisă pentru momentul general $t = t_{i+1}$:

$$\mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{S}\mathbf{X}_i + \mathbf{R}p_{i+1}, \quad i \geq 0$$

Aplicată sucesiv pentru i = 0, 1, …, n-1, se obţine:

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{X}_0 + (p_1\mathbf{S}^{n-1} + p_2\mathbf{S}^{n-2} + \ldots + p_n\mathbf{I})\mathbf{R} \tag{90}$$

în care $p_j = p(t_j)$, iar **I** este matricea unitate.

Să presupunem că, condiţia iniţială $\mathbf{X}_0$ este afectată de o eroare **d**, astfel că în loc de $\mathbf{X}_0$ avem:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{d}$$

Soluţia calculată cu condiţia iniţială $\mathbf{Y}_0$ va fi dată de (90), fie aceasta

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{Y}_0 + (p_1\mathbf{S}^{n-1} + p_2\mathbf{S}^{n-2} + \ldots + p_n\mathbf{I})\mathbf{R} \tag{91}$$

Scăzând (91) din (90) avem eroarea

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{d}$$

Definiţie

Operatorul se zice *stabil* dacă eroarea $\mathbf{e}_n$ rămâne mărginită pentru $\forall n$ ■

Pentru a analiza această condiţie, vom considera forma Jordan a matricii **S**. Vom nota cu $\lambda_i, i = \overline{1,r}$ valorile proprii ale lui **S**, acestea sunt rădăcinile polinomului caracteristic

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{S} - \lambda\mathbf{I}).$$

O rădăcină λ_i poate fi simplă, sau multiplă de ordinul $k_i, k_i > 1$. Dacă λ_i este multiplă de ordinul k_i, vom presupune că există k_i vectori proprii liniar independenţi asociaţi cu λ_i (pentru cazul în care ipoteza nu este realizată vezi Observaţia de mai jos). Cu aceasta rezultă că matricea **S** – presupusă *m*×*m* – are *m* vectori proprii liniar independenţi şi este similară cu o matrice diagonală (v. Barnett & Storey (1970)). Adică, există o matrice nesingulară **T**, astfel că

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}, \tag{92}$$

în care **J** este forma Jordan, dată de

$$\mathbf{J} = diag[\lambda_i]. \tag{93}$$

Dacă λ_i este multiplă de ordinul k_i, atunci ea se repetă de k_i ori pe diagonala lui **J**. Avem $\mathbf{S}^n = \mathbf{T}\mathbf{J}^n\mathbf{T}^{-1}$, unde $\mathbf{J}^n = diag[\lambda_i^n]$. Notând $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{d}'$, rezultă

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{S}^n\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{J}^n\mathbf{d}'.$$

Astfel, coordonata *j* a vectorului $\mathbf{e}_n$ va fi dată

$$e_n^{(j)} = \sum_{i=1}^{r} t_{ji}\lambda_i^n d'^{(i)}$$

Pentru a avea $\forall n \quad |e_n^{(j)}| \leq M_j$, este necesar şi suficient ca

1) $|\lambda_i| \leq 1, \quad i = \overline{1,r}$ (94)

sau

1') $\rho(\mathbf{S}) \leq 1$ (95)

unde $\rho(\mathbf{S}) = \max_i |\lambda_i|$ este raza spectrală a lui **S**.

Dacă inegalitatea în (94, 95) este strictă, adică $\rho(\mathbf{S}) < 1$, atunci rezultă $n \to \infty \Rightarrow \mathbf{e}_n \to \mathbf{0}$.

Observaţie

În cazul când λ_i este multiplă de ordinul k_i şi îi corespund $\bar{k}_i < k_i$ vectori proprii liniar independenţi, atunci **S** este similară cu o matrice bloc-diagonală. Adică (92) are loc, cu **J** dat de

$$\mathbf{J} = diag\left\lfloor \mathbf{j}_{k_1}(\lambda_1) \quad \mathbf{j}_{k_2}(\lambda_2) \quad \ldots \quad \mathbf{j}_{k_r}(\lambda_r) \right\rfloor,$$

în care: $\mathbf{j}_k(\lambda)$ este blocul Jordan (matrice $k \times k$)

$$\mathbf{j}_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}, \tag{96}$$

$\mathbf{j}_1(\lambda) = \lambda$ (matrice 1×1), şi unde: $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, iar λ_i nu sunt în mod necesar distincte. De exemplu, în cazul unei matrici 4×4 la care $\lambda_1 = \lambda_2$ şi λ_3, λ_4 sunt simple, iar lui λ_1 îi corespunde un singur vector propriu liniar independent, forma Jordan este:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Pentru blocurile Jordan se verifică, prin inducţie, că avem:

$$(\mathbf{j}_2(\lambda_1))^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & C_n^1 \lambda_1^{n-1} \\ & \lambda_1^n \end{bmatrix}; \qquad (\mathbf{j}_3(\lambda_1))^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & C_n^1 \lambda_1^{n-1} & C_n^2 \lambda_1^{n-2} \\ & \lambda_1^n & C_n^1 \lambda_1^{n-1} \\ & & \lambda_1^n \end{bmatrix}; \quad \text{etc.,}$$

în care C_n^k sunt coeficienţii binomiali.

Astfel, pentru exemplul de mai sus (λ_1 dublă), coordonatele lui $\mathbf{e}_n$ sunt:

$$e_n^{(j)} = c_{j1}\lambda_1^n + nc_{j2}\lambda_1^{n-1} + c_{j3}\lambda_3^n + c_{j4}\lambda_4^n$$

unde c_{ij} sunt coeficienţi numerici. Rezultă că, pentru a avea $\forall n \quad |e_n^{(j)}| \le M_j$, pe lângă condiţia 1 din (95), mai trebuie să avem:

2) Dacă $|\lambda_i| = 1$, atunci λ_i să nu genereze un bloc Jordan (96). (97)

În particular, condiţia 2 este realizată dacă λ_i este rădăcină simplă.

■

Stabilitatea

Întrucât **S** and **S**' au aceleaşi valori proprii, lucrăm cu matricea **S**'. Polinomul caracteristic al lui **S**' poate fi pus sub forma:

$$p_1(\lambda) = \frac{1}{a} \cdot \lambda \cdot q(\lambda) \tag{98}$$

unde $q(\lambda)$ este un polinom de gradul 3. Polinomul *q(λ)* din (92) este dat de:

$$q(\lambda) = d_0\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3 \tag{99}$$

Utilizând coeficienţii operatorului $\beta = \frac{1}{6}$, $\beta\theta = \frac{1}{24}$; $\gamma = \frac{1}{2}$, $\theta'\gamma = \frac{1}{6}$;

$\delta = 1, \theta''\delta = \frac{1}{2}$, rezultă:

$$a = \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\zeta x; \quad x = \omega \cdot h, \tag{100a}$$

Punând:

$$a_0 = \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{1}{2} \tag{100b}$$

coeficienţii polinomului $q(\lambda)$ sunt daţi de:

$$d_0 = a_0 + \tfrac{1}{3}\zeta x,\ d_1 = \tfrac{1}{2}x^2 - a_0 + \zeta x,\ d_2 = \tfrac{1}{2}x^2 - a_0 - \zeta x,$$

$$d_3 = a_0 - \tfrac{1}{3}\zeta x \tag{100c}$$

Criteriul de stabilitate este (95). Se observă că întotdeauna există o valoare proprie $\lambda = 0$ (matricea **S** este singulară).

a) Sistem fără amortizare ($\zeta = 0$)

Ecuaţia $p(\lambda) = 0$ ia forma:

$$\lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2b\lambda + 1) = 0, \tag{101}$$

unde

$$b = \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2}.$$

Avem astfel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, iar λ_3, λ_4 sunt rădăcinile ecuaţiei de gradul 2:

$$\lambda^2 - 2b\lambda + 1 = 0. \tag{102}$$

Avem $\lambda_3\lambda_4 = 1$, astfel că ecuaţia (102) trebuie să aibă numai rădăcini complexe (acestea sunt de modul 1), ceea ce conduce la:

$$x^2 < 6, \quad \text{sau}$$
$$\frac{h}{T} < \frac{\sqrt{6}}{2\pi} = 0.389848 \tag{103}$$

Aceasta este limita de stabilitate pentru raportul *h/T* (lungime pas/perioadă).

b) Sistem cu amortizare ($\zeta \neq 0$)**. Operatorul cu mediere.**

Utilizând criteriul Routh-Hurwitz (v. Hairer & al. (1987)), se poate arătă că pentru $\zeta \neq 0$ operatorul este *instabil* pentru orice pas *h*. Procesul descris mai jos, numit “medierea asupra lui $\ddot{u}$ ”, va asigura stabilitatea operatorului pentru sisteme liniare cu amortizare. Presupunem $p(t)$ derivabil pe intervalul $[t_0, t_1]$. Atunci, derivând ecuaţia de mişcare (80) avem:

$$\dddot{u} + 2\zeta\omega\ddot{u} + \omega^2\dot{u} = \dot{p}(t) \tag{104}$$

Susbtituind în (104), scrisă pentru $t = t_1$, valorile $u_1, \dot{u}_1$ şi $\ddot{u}_1$ calculate din (52a-c), se obţine o nouă valoare a lui $\dddot{u}(t_1)$, fie aceasta:

$$\dddot{u}_1^{(1)} = -\omega^2\dot{u}_1 - 2\zeta\omega\ddot{u}_1 + \dot{p}(t_1) \tag{105}$$

Dacă valorile $u_1, \dot{u}_1, \ddot{u}_1$ ar fi exacte, atunci $\ddot{u}_1$ dat de (56d) ar fi egal cu $\ddot{u}_1^{(1)}$ dat de (105). Media cu ponderea ν, $0<\nu<1$, a acestor două valori, se va lua ca nouă aproximaţie a lui $\ddot{u}(t_1)$, adică:

$$\ddot{u}_1^{(m)} = \nu\ddot{u}_1 + (1-\nu)\ddot{u}_1^{(1)} \tag{106}$$

Notând cu

$$\mathbf{X}_1^{(m)} = \begin{bmatrix} u_1 & \dot{u}_1 & \ddot{u}_1 & \ddot{u}_1^{(m)} \end{bmatrix}^T \tag{107}$$

ecuaţia *operatorului cu mediere* ia forma

$$\mathbf{X}_1^{(m)} = \mathbf{S}^{(m)}\mathbf{X}_0 + \mathbf{R}^{(m)} \tag{108}$$

în care $\mathbf{S}^{(m)}$ are următoatre structură:

$$\mathbf{S}^{(m)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_3 \\ \nu\mathbf{S}_4 + (1-\nu)(-\omega^2\mathbf{S}_2 - 2\zeta\omega\mathbf{S}_3) \end{bmatrix} \tag{109}$$

În (109), $\mathbf{S}_i$ notează linia "*i*" a matricii **S**. Notând cu $\mathbf{S}'^{(m)} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{S}^{(m)}\mathbf{D}$, matricea $\mathbf{S}'^{(m)}$ va avea structura din (89), înlocuind ultima linie cu $\nu\mathbf{S}'_4 + (1-\nu)(-\omega^2\mathbf{S}'_2 - 2\zeta\omega\mathbf{S}'_3)$ - unde $\mathbf{S}'_i$ este linia "*i*" a matricii $\mathbf{S}'$.

Polinomul caracteristic al matricii $\mathbf{S}'^{(m)}$ este dat de:

$$p_1^{(m)}(\lambda) = \frac{1}{a}\lambda[\nu q(\lambda) + (1-\nu)r(\lambda)]$$

Pentru ν = 1, $p_1^{(m)}(\lambda)$ devine polinomul caracteristic al matricii $\mathbf{S}'$ - dat de (98). Polinomul $q(\lambda)$ este definit de (99, 100), iar polinomul $r(\lambda)$ este dat de:

$$r(\lambda) = f_0\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3$$

unde:

$$f_0 = \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\zeta x$$

$$f_1 = -\tfrac{1}{144}x^4 + \tfrac{5}{12}x^2 - 1 - \tfrac{1}{12}\zeta x^3 - \tfrac{1}{3}\zeta^2 x^2 + \tfrac{1}{3}\zeta x$$

$$f_2 = \tfrac{1}{144}x^4 + \tfrac{1}{24}x^2 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12}\zeta x^3 + \tfrac{1}{3}\zeta^2 x^2 - \tfrac{2}{3}\zeta x$$

$f_3 = 0$

În Figura 1 de mai jos, se dă raza spectrală $\rho^{(m)}$ a matricii $\mathbf{S}^{(m)}$ pentru $\nu = 0.5$, pentru rapoarte de amortizare ζ în plaja 0.0 … 0.9, reprezentată în funcţie de raportul *h*/*T* (unde *T* este perioada sistemului fără amortizare) . Valoarea *h*/*T* pentru care $\rho^{(m)} = 1$ este limita de stabilitate pentru valoarea ζ respectivă.

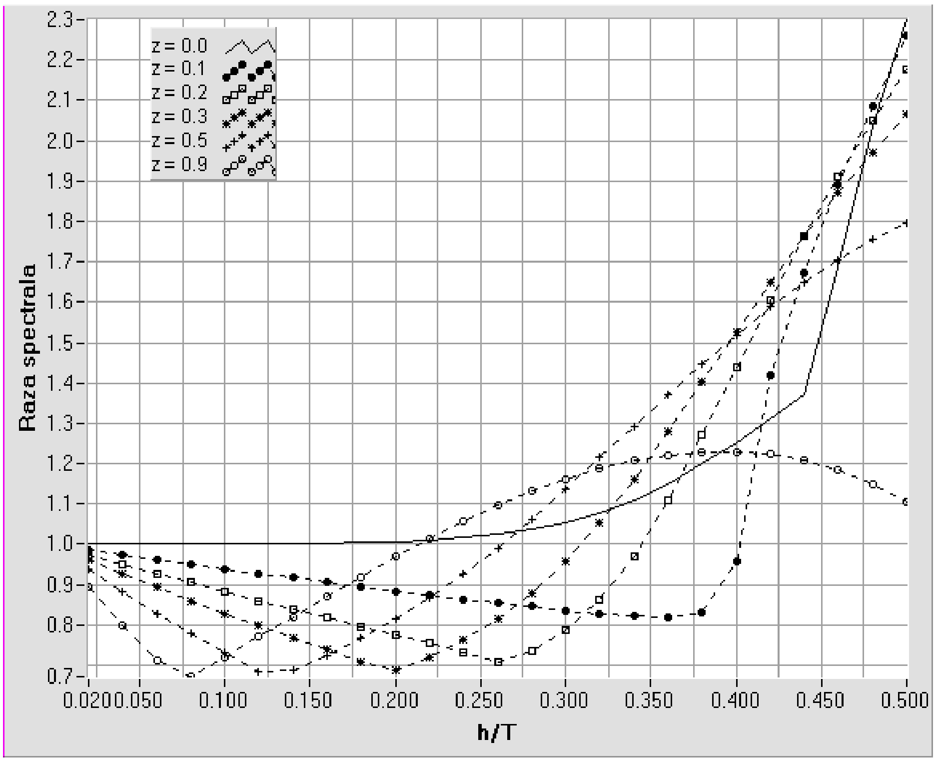


Fig. 1 – Raza spectrală pentru ν = 0.5, pentru diferite rapoarte de amortizare ζ = z

În Figura 2 se dă limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru $\nu = 0.5$ şi $\nu = 0.9$, reprezentată în funcţie de ζ.

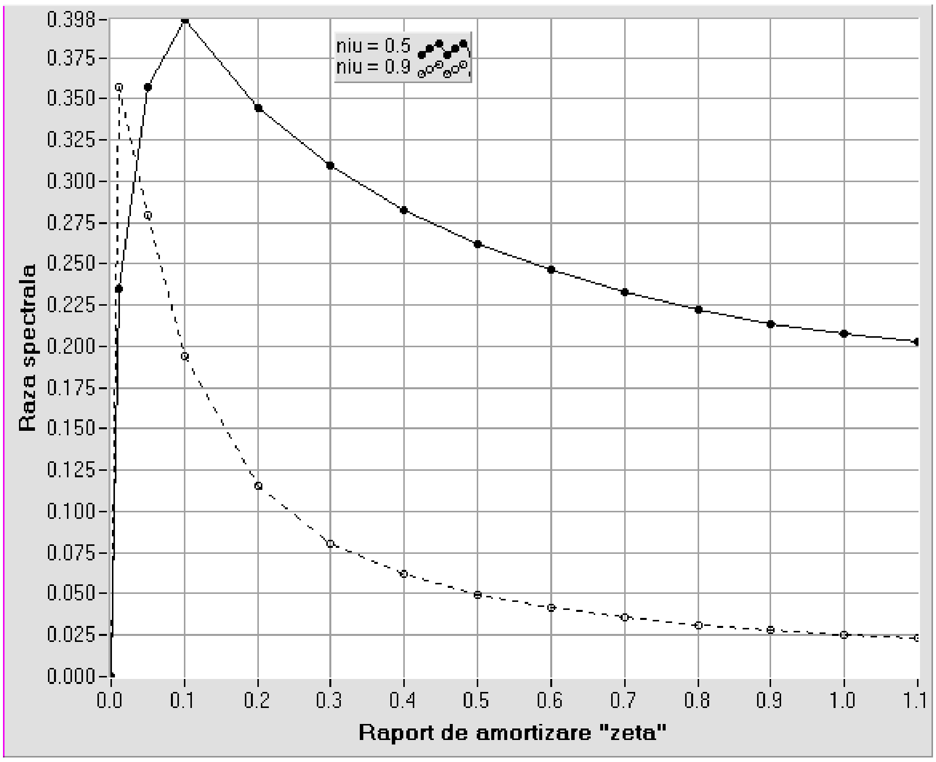


Fig. 2 – Limita de stabilitate a operatorului cu mediere, pentru ν = 0.5 şi ν = 0.9

Din Figura 2 se poate observa că, pentru o valoare dată ζ, limita de stabiliate descreşte pe măsură ce ν (ν < 1) se apropie de 1. Teste numerice (pentru sisteme liniare cu amortizare) au arătat că, valori ν apropiate de 1 oferă o precizie mai mare, dar mărimea pasului este limitată de raza spectrală. O valoare care convine este $\nu = 0.5$, adică în (106) se ia *media aritmetică* a celor două valori.

Medierea pentru $\zeta = 0$:

Utilizând polinomul caracteristic al lui $\mathbf{S}'^{(m)}$ şi criteriul Routh-Hurwitz, se poate arăta analitic, că operatorul cu mediere este instabil pentru orice ν şi orice *h*. În particular, pentru ν = 0.5, aceasta se observă pe graficul din Figura 1, pentru z = 0: avem $\rho \geq 1$. În consecinţă, medierea asupra lui $\ddot{u}$ se va utiliza *pentru şi numai pentru* sisteme cu amortizare.

Observaţie

Pentru un sistem (2), medierea asupra lui $\ddot{\mathbf{U}}$ se obţine pe aceeaşi cale ca mai sus. Derivând ecuaţia (2) se obţine $\mathbf{M}\dddot{\mathbf{U}} + \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}})\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{A}(\mathbf{U})\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{P}}(t)$, şi înlocuind $\mathbf{U}_1, \dot{\mathbf{U}}_1$ şi $\ddot{\mathbf{U}}_1$ din (57 a-c) avem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)} = \dot{\mathbf{P}}(t_1) - \mathbf{B}(\dot{\mathbf{U}}_1)\ddot{\mathbf{U}}_1 - \mathbf{A}(\mathbf{U}_1)\dot{\mathbf{U}}_1$$

care se rezolvă în raport $\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)}$. Medierea este dată de:

$$\ddot{\mathbf{U}}_1^{(m)} = \nu\ddot{\mathbf{U}}_1 + (1-\nu)\ddot{\mathbf{U}}_1^{(1)}$$

unde $\ddot{\mathbf{U}}_1$ este dat de (57d)

■

Exemplu de test – problema celor două corpuri

Următoarea problemă, constituită de problema celor două corpuri în cazul mişcării eliptice, este luată ca test pentru metodele de integrare numerică a problemei cu valori iniţiale – v. Dormand and Prince (1978), Brankin and Gladwell (1994). Problema consideră mişcarea relativă a două puncte materiale care interacţionează prin legea atracţiei universale, şi este descrisă, în coordonate carteziene, de sistemul de ecuaţii diferenţiale:

$$\ddot{x} = -x/r^3,\ \ddot{y} = -y/r^3,$$

în care $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Se consideră conditiile iniţiale pentru cazul mişcării eliptice $x(0) = 1-e,\ \dot{x}(0) = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}$,

în care $e < 1$. Soluţia analitică este dată de:

$$x = \cos u - e, \quad y = \sqrt{1-e^2}\sin u, \quad \dot{x} = \frac{-\sin u}{1-e\cos u}, \quad \dot{y} = \frac{\sqrt{1-e^2}\cos u}{1-e\cos u}$$

în care u se determină din ecuaţia lui Kepler: $u - e\sin u = t$. Soluţia este periodică cu perioada minimă $T = 2\pi$, iar orbita este o elipsă cu excentricitatea e şi semi-axa mare egală cu 1. Problema reprezintă un test sever, datorită periodicităţii soluţiei. Pentru rezolvarea numerică – cu o metodă pentru ecuaţii de ordinul întâi, sistemul dat se transformă într-un sistem echivalent de 4 ecuaţii de ordinul întâi:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{y} = w, \quad \dot{v} = -x/r^3, \quad \dot{w} = -y/r^3; \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

cu condiţiile iniţiale: $x(0) = 1-e,\ y(0) = 0,\ v(0) = 0,\ w(0) = \sqrt{(1+e)/(1-e)}$.

Calculăm soluţia pe intervalul [0, 20], adică peste trei perioade, pentru valorile $e = 0.1$ şi $e = 0.9$ ale excentricităţii.

■

Considerăm cazul *e* = 0.9, acesta fiind testul cel mai sever. Integrăm cu noul operator, cu coeficienţii: $\beta = \frac{1}{6}$, $\beta\theta = \frac{1}{24}$; $\gamma = \frac{1}{2}$, $\theta'\gamma = \frac{1}{6}$; $\delta = 1, \theta''\delta = \frac{1}{2}$ – formulele (56) şi luând: *eps* = 1E-6, *lnit* = 3. Codul utilizat este cel dat în ANA_EcDif. Comparaţia rezultatelelor cu cele obţinute prin metoda RK4 (pas constant) se dă în tabelul următor.

e = 0.9, Erori absolute extreme la *t* = 18.849 (18.84 – pentru *h* = 0.01; 0.005).

Pasul h	RK4		Noul Operator	
	Eroarea absolută		Eroarea absolută	
	Maximă ($\dot{x}$)	Minimă (x)	Maximă ($\dot{x}$)	Minimă (x)
0.01†	3.52 D0	3.54 D-1	1.58 D0	5.93 D-2
0.005	7.12 D-1	4.26 D-3	1.42 D-1	1.68 D-3
0.001	6.02 D-4	3.33 D-7	2.63 D-3	1.47 D-7
0.0005	3.28 D-5	1.82 D-8	1.64 D-5	9.13 D-9
0.0001	4.64 D-8	1.19 D-11	2.72 D-8	6.98 D-12

† Eroarea maximă are loc în $\dot{y}$.

Observaţii

a) După cum se observă din tabel, erorile sunt cca. 1/2 din cele ale metodei RK4.

b) Convergenţa iteraţiei în metoda Newton (subrutina `NewOp`) este rapidă: de exemplu, pentru *h* = 0.001, după 2 iteraţii valorile normei corecţiei (`delta_w`) sunt de ordinul $10^{-13} \ldots 10^{-14}$, sau chiar 0.0 (cu excepţia primelor momente când au ordinul $10^{-8} \ldots 10^{-12}$) ■