

Capitolul 3

ANALIZA ÎN DEFORMAȚII FINITE – TEORIA DE CALCUL (Sumar)

1 DEFINIȚII, REPERE

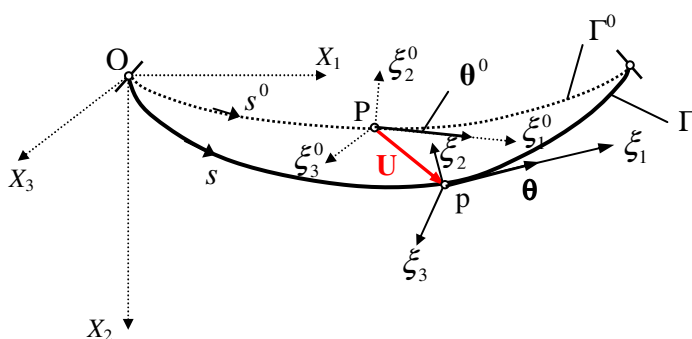


Fig. 1 – Cablul în configurația inițială și configurația deformată

Configurații

$\Gamma^0 = \Gamma(t_0)$... Configurația inițială la momentul t_0 ;

$\Gamma = \Gamma(t)$... Configurația la momentul t .

Reper

$OX_1X_2X_3$... reper general (fix).

$P \in \Gamma^0$, $P(X_1, X_2, X_3)$... punct generic pe Γ^0 .

$p \in \Gamma$, $p(x_1, x_2, x_3)$... poziția lui P, la momentul t .

$\mathbf{U} = \overrightarrow{Pp}$... vectorul deplasare.

Definiții

$\{X_1, X_2, X_3\}$ se numesc coordonatele *lagrangeene* sau *materiale*. Ele sunt “identificatorii” punctului P.

$\{x_1, x_2, x_3\}$ se numesc coordonatele *euleriene* sau *spațiale*.

Mișcarea

Este definită de funcțiile:

$$x_k = x_k(X_1, X_2, X_3, t); \quad k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Ecuțiile (1) dau reprezentarea lagrangeană ale mișcării. Vectorial (1) se scriu:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$$

unde $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Vectorul deplasare este dat de

$$\mathbf{U} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad \mathbf{U} = \{U^1, U^2, U^3\}.$$

Coordonate intrinseci și repere locale

Γ^0 : Arcul se notează s^0 . Reperul intrinsec în P este $P\xi_1^0\xi_2^0\xi_3^0$, unde: ξ_1^0 este tangenta în P la Γ^0 , iar $\xi_2^0 \perp \xi_3^0$ sunt axe în secțiunea perpendiculară pe ξ_1^0 . Vectorul unitar al tangentei în P la Γ^0 se notează θ^0 (versorul axei ξ_1^0).

Γ : Arcul se notează s . Reperul intrinsec în p este $p\xi_1\xi_2\xi_3$, unde: ξ_1 este tangenta în p la Γ , iar $\xi_2 \perp \xi_3$ sunt axe în secțiunea perpendiculară pe ξ_1 . Vectorul unitar al tangentei în P la Γ se notează θ (versorul axei ξ_1).

2 IPOTEZE DE CALCUL

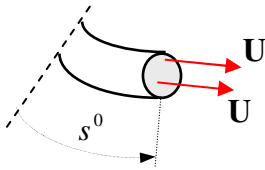
2.1 Deplasări și deformații

Ținând cont de dimensiunile mici ale secțiunii transversale în raport cu lungimea cablului, presupunem:

Ipoteza I

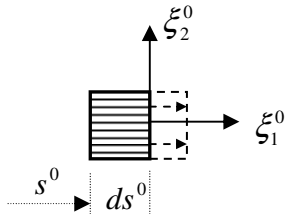
Vectorii deplasare \mathbf{U} nu depind decât de s^0 .

Adică, vectorii \mathbf{U} sunt aceeași în toate punctele secțiunii transversale.



Ipoteza II

- În P avem o stare uniaxială de deformație, și anume *extensie simplă* după ξ_1^0 .
- Fibrele perpendiculare pe ξ_1^0 , rămân perpendiculare pe ξ_1 (după deformație).



Observație: efectul Poisson se neglijează.

Consecințe ale ipotezelor I, II:

După deformație, în p:

- axa ξ_1^0 devine ξ_1 ;
- axele ξ_2, ξ_3 vor fi perpendiculare pe ξ_1 , și perpendiculare între ele. Atunci:

Alegem reperul $p\xi_1\xi_2\xi_3$ ca fiind poziția deplasată a reperului $P\xi_1^0\xi_2^0\xi_3^0$.

Vectori și tensori de deformație

Fie punctele $P(s^0)$ și $P'(s^0 + ds^0)$ pe Γ^0 . În configurația deplasată Γ , $P \mapsto p(s)$ și $P' \mapsto p'(s + ds)$.

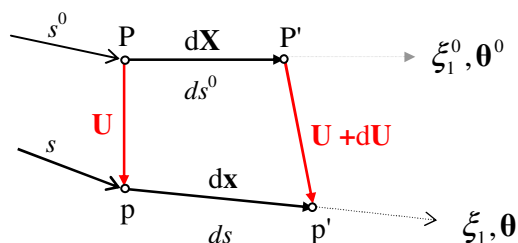


Fig.2 – Deformarea elementului de cablu

Notăm:

$$d\mathbf{X} = \overrightarrow{PP'}, \quad |d\mathbf{X}| = ds^0$$

$$d\mathbf{x} = \overrightarrow{pp'}, \quad |d\mathbf{x}| = ds$$

Avem:

$$\mathbf{U} + d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{U} + d\mathbf{U},$$

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + d\mathbf{U}$$

care, împărțită cu ds^0 dă:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{ds^0} = \frac{d\mathbf{X}}{ds^0} + \frac{d\mathbf{U}}{ds^0}$$

Avem:

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds^0} = \boldsymbol{\theta}^0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \boldsymbol{\theta}$$

și rezultă

$$\boldsymbol{\theta} \frac{ds}{ds^0} = \boldsymbol{\theta}^0 + \frac{d\mathbf{U}}{ds^0}$$

Introducem, prin definiție, vectorul

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\theta}^0 + \frac{d\mathbf{U}}{ds^0}$$

și avem

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\theta} \frac{ds}{ds^0}, \quad |\mathbf{V}| = \frac{ds}{ds^0}$$

Vectorul \mathbf{V} va juca un rol fundamental în formularea ecuațiilor de mișcare și echilibru.

Deformația specifică în $P(s^0)$, între Γ și Γ^0 , se va exprima prin:

$$\frac{ds - ds^0}{ds^0} = \frac{ds}{ds^0} - 1 = |\mathbf{V}| - 1$$

Tensorul lagrangeean al deformațiilor

Prin definiție, punem

$$ds^2 - (ds^0)^2 = 2E_{KL} dX_K dX_L, \quad K, L = 1, 2, 3$$

unde E_{KL} este tensorul lagrangeean al deformațiilor.

(Se utilizează convenția Einstein de sumare în raport cu indicele repetat. Explicit:

$$E_{KL} dX_K dX_L = \sum_K \sum_L E_{KL} dX_K dX_L = E_{11} (dX_1)^2 + E_{12} dX_1 dX_2 + \dots)$$

În reperul local $P \xi_1^0 \xi_2^0 \xi_3^0$, notând pentru claritate $E_{\xi_\alpha \xi_\beta} = E_{\alpha\beta}$, definiția devine:

$$ds^2 - (ds^0)^2 = 2E_{\xi_\alpha \xi_\beta} d\xi_\alpha^0 d\xi_\beta^0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Ipoteza II înseamnă:

$$E_{\xi_\alpha \xi_\beta} = 0, \text{ pentru } (\alpha, \beta) \neq (1, 1).$$

Cu aceasta, rezultă:

$$ds^2 - (ds^0)^2 = 2E_{\xi_1 \xi_1} d\xi_1^0 d\xi_1^0 = 2E_{\xi_1 \xi_1} (ds^0)^2$$

Sau, notînd simplu

$$E = E_{\xi_1 \xi_1},$$

rezultă:

$$2E = \frac{ds^2 - (ds^0)^2}{(ds^0)^2} = \frac{ds^2}{(ds^0)^2} - 1$$

În fine, cu vectorul \mathbf{V} definit mai sus, avem:

$$2E = |\mathbf{V}|^2 - 1 = \mathbf{V}^2 - 1$$

Calculînd \mathbf{V}^2 avem ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ desemnează produsul scalar)

$$\mathbf{V}^2 = \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} + 2\boldsymbol{\theta}^0 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} + 1$$

din care:

$$\mathbf{V}^2 - 1 = \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} + 2\boldsymbol{\theta}^0 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0}$$

sau

$$E = \boldsymbol{\theta}^0 \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{ds^0}$$

Observație

Ecuțiile de mișcare conțin \ddot{E} , care se calculează pe ultima expresie a lui E .

■

2.2 Tensiunea

Ipoteza III

În p avem o stare uniaxială de tensiune, după ξ_1 .

Rezultă că în p , în reperul $p\xi_1\xi_2\xi_3$, tensorul Cauchy al tensiunilor va fi dat de:

$$\begin{cases} t_{\xi_1\xi_1} = \sigma \\ t_{\xi_\alpha\xi_\beta} = 0, \text{ pentru } (\alpha, \beta) \neq (1,1) \end{cases}$$

în care:

$$\sigma = \frac{T^*}{A},$$

unde T^* este forța axială în p .

Rapel:

Tensorul Cauchy al tensiunilor, într-un reper $Ox_1x_2x_3$ este:

$$[t_{kl}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} t_{ii} = \sigma_i \\ t_{ij} = \tau_{ij}, \quad i \neq j \end{cases}$$

Ecuțiile de mișcare se formulează cu **tensorul Piola-Kirchhoff** al tensiunilor, definit în reperul $P\xi_1^0\xi_2^0\xi_3^0$, de

$$\begin{cases} T_{\xi_1^0\xi_1^0} = \frac{ds^0}{ds} \hat{\sigma} \\ T_{\xi_\alpha^0\xi_\beta^0} = 0, \quad (\alpha, \beta) \neq (1,1) \end{cases}$$

în care

$$\hat{\sigma} = \frac{T^*}{A^0}$$

În expresia anterioară:

T^* = forța axială în p (în configurația deformată Γ);

A^0 = aria secțiunii transversale în P (în configurația nedeformată Γ^0);

$\hat{\sigma}$ = tensiunea în p , referită la aria nedeformată A^0 .

Observație:

Modificarea ariei $A^0 \rightarrow A$ provine din modificarea volumului $V^0 \rightarrow V$, în conformitate cu principiul conservării masei:

$$\int_V \rho dV = \int_{V^0} \rho^0 dV^0$$

La un cablu, avem:

$$dV = A \cdot ds, \quad dV^0 = A^0 \cdot ds^0, \quad \text{și} \quad \rho dV = \rho^0 dV^0 = dm \quad \blacksquare$$

2.3 Legătura tensiune-deformație

Vom nota:

$\Gamma^{(r)}$ = configurația de referință; în particular, $\Gamma^{(r)} = \Gamma^0$ = configurația inițială.

Γ = configurația curentă.

Γ^* = o configurație imaginară, în care cablul este lipsit de tensiuni.

Legătura dintre tensiunea $\hat{\sigma} = T^* / A^0$ și deformația specifică ε este dată de curba tensiune-deformație:

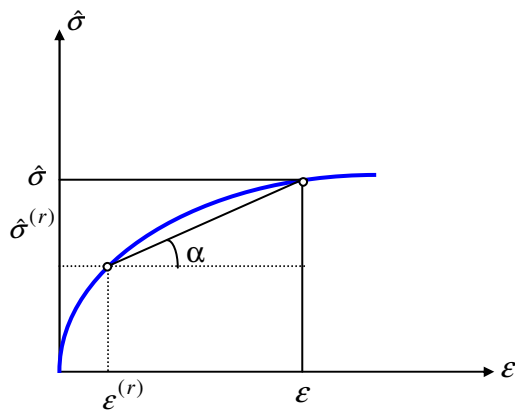


Fig.3 – Legătura tensiune – deformație

$Y^0 = \operatorname{tg} \alpha$ = modulul de elasticitate secant, între $(\hat{\sigma}^{(r)}, \varepsilon^{(r)})$ și $(\hat{\sigma}, \varepsilon)$.

Ipoteza IV

Legătura între tensiuni și deformații este dată de:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{(r)} + Y^0(\varepsilon - \varepsilon^{(r)})$$

în care:

$$\varepsilon = \frac{ds - ds^*}{ds^*}; \quad \varepsilon^{(r)} = \frac{ds^{(r)} - ds^*}{ds^*}$$

Rezultă:

$$\varepsilon - \varepsilon^{(r)} = \frac{ds - ds^{(r)}}{ds^0} \frac{ds^0}{ds^*} = \lambda^0 (|\mathbf{V}| - |\mathbf{V}^{(r)}|)$$

unde s-a pus:

$$\lambda^0 = \frac{ds^0}{ds^*} = 1 + \varepsilon^0 = 1 + \frac{\hat{\sigma}^0}{Y^0}$$

Notând

$$\Delta V^{(r)} = |\mathbf{V}| - |\mathbf{V}^{(r)}|$$

relațiile tensiuni – deformații și respectiv deformații – deplasări, iau forma:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \hat{\sigma}^{(r)} + \lambda^0 Y^0 \Delta V^{(r)} \\ \varepsilon &= \varepsilon^{(r)} + \lambda^0 \Delta V^{(r)} \end{aligned}$$

În particular, dacă $\Gamma^{(r)} = \Gamma^0$, adică, configurația de referință este Γ^0 , relațiile devin:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \hat{\sigma}^{(0)} + \lambda^0 Y^0 \Delta V^{(0)} \\ \varepsilon &= \varepsilon^{(0)} + \lambda^0 \Delta V^{(0)} \end{aligned}$$

în care:

$$\Delta V^{(0)} = |\mathbf{V}| - \frac{ds^0}{ds^0} = |\mathbf{V}| - 1$$

Rezultă explicit:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \hat{\sigma}^{(0)} + \lambda^0 Y^0 (|\mathbf{V}| - 1) \\ \varepsilon &= \varepsilon^{(0)} + \lambda^0 (|\mathbf{V}| - 1) \end{aligned}$$

În aceste relații:

$$\hat{\sigma} = \frac{T^*}{A^0},$$

unde:

T^* este forța axială în p (în configurația Γ);

A^0 = aria secțiunii transversale în P (în configurația Γ^0).

$$\hat{\sigma}^{(0)} = \frac{T^0}{A^0},$$

unde $T^0 = T^{*0}$ este forța axială în configurația inițială Γ^0 ;

$\varepsilon^{(0)} = \frac{\hat{\sigma}^{(0)}}{Y^0}$ este deformația specifică în Γ^0 .

■

Observație

Tensiunea Piola-Kirkhoff ia forma (ținând cont de $\frac{ds}{ds^0} = |\mathbf{V}|$):

$$T_{\xi_1^0 \xi_1^0} = \frac{ds^0}{ds} \hat{\sigma} = \frac{\hat{\sigma}}{|\mathbf{V}|} = \frac{\hat{\sigma}^{(0)} + \lambda^0 Y^0 (|\mathbf{V}| - 1)}{|\mathbf{V}|} = \frac{\hat{\sigma}^{(0)} - \lambda^0 Y^0}{|\mathbf{V}|} + \lambda^0 Y^0$$

Ecuțiile de mișcare și echilibru se formulează cu “rezultanta tensiunilor Piola”, dată de

$$T = A^0 T_{\xi_1^0 \xi_1^0}$$

Cu expresia anterioară, rezultă:

$$T = \frac{T^{(0)} - \lambda^0 Y^0 A^0}{|\mathbf{V}|} + \lambda^0 Y^0 A^0,$$

unde $T^{(0)} = \hat{\sigma}^{(0)} A^0$ este forța din cablu în configurația Γ^0 .

Pe de altă parte, avem:

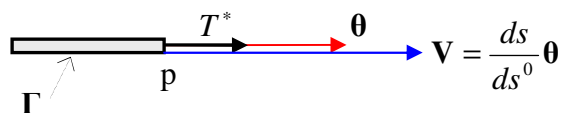
$$T = \frac{\hat{\sigma} A^0}{|\mathbf{V}|} = \frac{T^*}{|\mathbf{V}|}$$

unde T^* este forța axială din cablu în configurația Γ . Rezultă că T^* este dată de :

$$T^* = T |\mathbf{V}|$$

Cu $\mathbf{V} = |\mathbf{V}| \boldsymbol{\theta}$, rezultă și relația

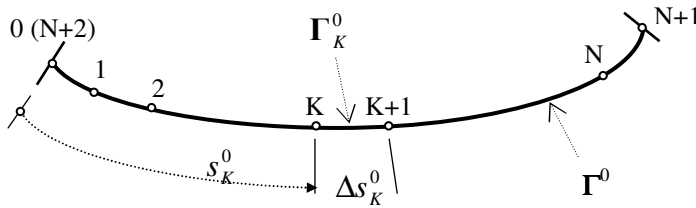
$$T\mathbf{V} = T |\mathbf{V}| \boldsymbol{\theta} = T^* \boldsymbol{\theta}$$



■

3 DISCRETIZAREA CABLULUI

3.1 Discretizare



Cablul se consideră divizat prin punctele $0, 1, \dots, N$ în arce $\Gamma_K^0 = [s_K^0, s_{K+1}^0]$, de lungime $\Delta s_K^0 = s_{K+1}^0 - s_K^0$. Pentru conveniență, nodul de capăt $N+2$ se notează cu indicele 0 . Avem astfel, $K = 0, N$

Punctele de diviziune se vor numi *noduri*. Arcele Γ_K^0 se vor numi *elemente*.

3.2 Ipoteze

Ipoteza V

Cablul este *drept* între două noduri.

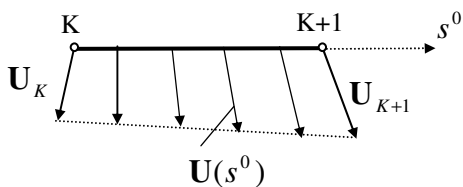
Rezultă:

$$\theta^0(s^0) = \theta_K^0 = \text{constant}, \text{ pentru } s^0 \in \Gamma_K^0$$

Ipoteza VI

Funcția $U(s^0)$ se presupune *liniară* pe Γ_K^0 .

Aria secțiunii transversale $A_K^0(s^0)$ este *constantă* pe Γ_K^0 .



Rezultă:

$$\mathbf{U}(s^0) = \mathbf{U}_K + \frac{\mathbf{U}_{K+1} - \mathbf{U}_K}{\Delta s_K^0} (s - s_K^0), \quad s^0 \in \Gamma_K^0$$

unde

$$\mathbf{U}_K = \mathbf{U}(s_K^0); \quad \mathbf{U}_{K+1} = \mathbf{U}(s_{K+1}^0)$$

Cu acestea, rezultă:

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{U}(s^0)}{ds^0} = \frac{\mathbf{U}_{K+1} - \mathbf{U}_K}{\Delta s_K^0} = \text{constant}, \quad \text{pentru } s^0 \in \Gamma_K^0;$$

$$(2) \quad \mathbf{V}(s^0) = \frac{d\mathbf{U}}{ds^0} + \boldsymbol{\theta}^0 = \mathbf{V}_K = \text{constant}, \quad \text{pentru } s^0 \in \Gamma_K^0, \text{ unde:}$$

$$\mathbf{V}_K = \frac{\mathbf{U}_{K+1} - \mathbf{U}_K}{\Delta s_K^0} + \boldsymbol{\theta}^0.$$

$$(3) \quad T(s^0) = T_K = \text{constant}, \text{ pe } \Gamma_K^0, \text{ unde:}$$

$$T_K = \frac{T_K^0 - \lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0}{|\mathbf{V}_K|} + \lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0$$

Notă

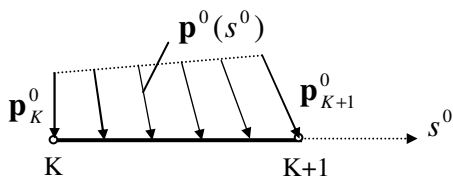
Următoarele mărimi cu indicele inferior K , și anume Δs_K , \mathbf{V}_K , T_K , A_K , λ_K , Y_K , se referă la elementul de cablu orientat $K \rightarrow K+1$ (noduri de capăt: K și $K+1$).

\mathbf{U}_K se referă la nodul K .

■

Ipoteza VII

Incărcarea $\mathbf{p}(s^0)$ este continuă pe Γ^0 , și este funcție *liniară* pe Γ_K^0 .



Observație

Încărcarea $\mathbf{p}^0(s^0)$ este densitatea de distribuție a încărcării \mathbf{P} – raportată la lungimea arcului în configurația Γ^0 :

$$\mathbf{p}^0 = \frac{d\mathbf{P}}{ds^0} \quad \blacksquare$$

Din Ipoteza 6 rezultă:

$$\mathbf{p}^0(s^0) = \mathbf{p}_K^0 + \frac{\mathbf{p}_{K+1}^0 - \mathbf{p}_K^0}{\Delta s_K^0} (s - s_K^0); \quad s^0 \in \Gamma_K^0,$$

în care:

$$\mathbf{p}_K^0 = \mathbf{p}^0(s_K^0); \quad \mathbf{p}_{K+1}^0 = \mathbf{p}^0(s_{K+1}^0).$$

Rezultă forța echivalentă de nod:

$$\mathbf{P}_K = \frac{1}{6} [\Delta s_{K-1}^0 \mathbf{p}_{K-1}^0 + 2(\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) \mathbf{p}_K^0 + \Delta s_K^0 \mathbf{p}_{K+1}^0] + \bar{\mathbf{P}}_K$$

în care, $\bar{\mathbf{P}}_K$ este forța concentrată în nodul K . (În particular, putem avea: $\bar{\mathbf{P}}_K = \mathbf{0}$).

În particular, dacă $\mathbf{p}^0(s^0) = \mathbf{p}^0 = \text{constant}$ pe Γ^0 (încărcare *uniform distribuită*), rezultă

$$\mathbf{P}_K = \frac{1}{2} (\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) \mathbf{p}^0 + \bar{\mathbf{P}}_K$$

■

4 ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Ecuția de mișcare a nodului K are forma

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}^0}{6} [\Delta s_{K-1}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1} + 2(\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) \ddot{\mathbf{U}}_K + \Delta s_K^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1}] + \bar{m}_K \ddot{\mathbf{U}}_K \\ + T_{K-1} \mathbf{V}_{K-1} - T_K \mathbf{V}_K - \mathbf{P}_K = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4-1)$$

în care:

$\bar{\rho}^0$ este densitatea de masă liniară – pe unitatea de lungime în configurația inițială Γ^0 ,

dată de

$$\bar{\rho}^0 = \frac{dm}{ds^0} = \frac{\rho^0 A^0 ds^0}{ds^0} = \rho^0 A^0,$$

unde $\rho^0 = dm / dV^0$ este densitatea de masă în Γ^0 ;

\bar{m}_K este masa concentrată în nodul K ;

$$\mathbf{V}_K = \frac{\mathbf{U}_{K+1} - \mathbf{U}_K}{\Delta s_K^0} + \boldsymbol{\theta}^0;$$

$$T_K = \frac{T^{(0)} - \lambda^0 Y^0 A^0}{|\mathbf{V}|} + \lambda^0 Y^0 A^0 \Big|_K ;$$

\mathbf{P}_K este forța echivalentă de nod, în nodul K .

Forma matriceală

Ecuția de mișcare a nodului K ia forma matriceală:

$$[m_{K-1} \mathbf{I}_3 \quad [2(m_{K-1} + m_K) + \bar{m}_K] \mathbf{I}_3 \quad m_K \mathbf{I}_3] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_{K-1} \\ \ddot{\mathbf{U}}_K \\ \ddot{\mathbf{U}}_{K+1} \end{bmatrix} + \mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = \mathbf{P}_K \quad (4-2)$$

în care:

$$m_L = \frac{\bar{\rho}^0}{6} \Delta s_L^0, \quad L = K-1, K; \quad \mathbf{I}_3 \text{ este matricea unitate } 3 \times 3; \quad \bar{m}_K \text{ este masa concentrată în}$$

nodul K . În cazul unei structuri plane, \mathbf{I}_3 se înlocuiește cu \mathbf{I}_2 (matricea unitate 2×2).

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = T_{K-1} \mathbf{V}_{K-1} - T_K \mathbf{V}_K;$$

Conform expresiilor de mai sus ale lui \mathbf{V}_K și T_K , rezultă că:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = \mathbf{f}_K(\mathbf{U}_{K-1}, \mathbf{U}_K, \mathbf{U}_{K+1}).$$

Ecuția de mai sus se scrie pentru toate nodurile cu grade de libertate: $K = 1, 2, \dots, N$.

Ele se pun sub forma matriceală

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t) \quad (4-3)$$

în care \mathbf{M} este matricea de inerție, iar

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N \end{bmatrix}$$

Structura matricii \mathbf{M} este de matrice bandă: pe "linia" corespunzătoare lui $\ddot{\mathbf{U}}_K$, în "coloanele" $K-1, K, K+1$, vin elementele matricii de masă din ecuația de mișcare a nodului K , și în restul coloanelor $\mathbf{0}$ (matricea nulă 3×3).

Observații

1) Amortizare

Ecuția matricială de mișcare a rețelei este

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(t)$$

Amortizarea este considerată de forma Rayleigh:

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K}$$

în care \mathbf{K} este matricea de rigiditate în configurația inițială: $\mathbf{K} = \mathbf{A}(\mathbf{U}(t_0))$, unde \mathbf{A} este jacobianul lui \mathbf{f} .

2) Excitație seismică

În cazul unei accelerații $\mathbf{a}(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t)\}$ imprimare suporturilor (excitație seismică), în ecuația de mișcare membrul doi se înlocuiește cu vectorul

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1 - m_1^e \cdot \mathbf{a} \quad \dots \quad \mathbf{P}_N - m_N^e \cdot \mathbf{a}]^T$$

în care $\mathbf{P}_K = \{P_K^1, P_K^2, P_K^3\}$ este vectorul forței echivalente în nodul K , iar m_K^e este masa echivalentă în nodul K .

Masa echivalentă de nod, în nodul K , se calculează prin:

$$m_K^e = \frac{1}{2} \bar{\rho}^0 (\Delta s_{K-1}^0 + \Delta s_K^0) + \bar{m}_K,$$

unde: $\bar{\rho}^0$ este densitatea de masă liniară pe Γ^0 , iar \bar{m}_K este masa concentrată în nodul K .

■

5 ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

Ecuțiile de echilibru se obțin punând $\ddot{\mathbf{U}}_K = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{U}}_K = \mathbf{0}$, $K = \overline{1, N}$, în ecuațiile de mișcare:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) - \mathbf{P} = \mathbf{0}; \quad K = 1, 2, \dots, N$$

Sau, matriceal

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}(\mathbf{U}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (5-1)$$

în care, conform celor anterioare, avem:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \\ \vdots \\ U_N^1 \\ U_N^2 \\ U_N^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{3N} \end{bmatrix} = [u_j]_{j=1,3N}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_1^2 \\ f_1^3 \\ \vdots \\ f_N^1 \\ f_N^2 \\ f_N^3 \end{bmatrix} = [f_i]_{i=1,3N}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_1^3 \\ \vdots \\ P_N^1 \\ P_N^2 \\ P_N^3 \end{bmatrix};$$

Ecuția (*) se rezolvă cu metoda Newton, prin:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{U}^{(k)}) \Delta \mathbf{U}^{(k+1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{U}^{(k)}) \\ \mathbf{U}^{(k+1)} = \mathbf{U}^{(k)} + \Delta \mathbf{U}^{(k+1)} \end{cases} \quad k \geq 0 \quad (5-2)$$

în care $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = [\partial f_i / \partial u_j]$ este jacobianul lui \mathbf{f} (sau \mathbf{F}), iar k indicele iterației.

Explicit:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{U}}$$

Iterația se oprește prin testele:

$$\|\Delta \mathbf{U}^{(k+1)}\| \leq EPS,$$

Numărul de iterații $k \leq LNIT$,

unde EPS și $LNIT$ (numărul limită de iterații) se aleg dinainte.

Observație

$\mathbf{U}^{(0)}$ este aproximația inițială a deplasării \mathbf{U} (din configurația Γ^0 , în configurația de echilibru Γ). Se poate lua $\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0}$

■

Explicit, ecuațiile (5-2) au forma:

$$\left[-\mathbf{A}_{K-1} \mid \mathbf{A}_{K-1} + \mathbf{A}_K \mid -\mathbf{A}_K \right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\Delta \mathbf{U}_{K-1}}{\Delta \mathbf{U}_K} \\ \frac{\Delta \mathbf{U}_K}{\Delta \mathbf{U}_{K+1}} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K \quad (5-3)$$

Ecuațiile (5-3) sunt scrise pentru $K = 1, 2, \dots, N$.

La pasul i al iterației, $\mathbf{A}_{K-1}, \mathbf{A}_K, \mathbf{f}_K$ sunt calculate în $\mathbf{U}^{(i)}$, iar $\Delta \mathbf{U}_j = \Delta \mathbf{U}_j^{(i+1)}$,

$J = K-1, K, K+1$. Explicit:

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} A_K^{11} & A_K^{21} & A_K^{31} \\ A_K^{12} & A_K^{22} & A_K^{32} \\ A_K^{13} & A_K^{32} & A_K^{33} \end{bmatrix} = [A_K^{LM}]$$

($L =$ indice de coloană; $M =$ indice de linie), unde

$$A_K^{LM} = \frac{1}{\Delta s_K^0} [\delta_{LM} T_K^0 + (\lambda_K^0 A_K^0 Y_K^0 - T_K^0) \frac{V_K^L V_K^M}{|\mathbf{V}_K|^3}]; \quad L, M = 1, 2, 3$$

Reamintim că mărimile $\Delta s_K, \mathbf{V}_K, T_K, A_K, \lambda_K, Y_K$, și odată cu acestea și \mathbf{A}_K, A_K^{LM} , se referă la elementul de cablu orientat $K \rightarrow K+1$.

■

Observație asupra ecuației de echilibru a nodului K

Explicit, ecuația de echilibru a nodului K este:

$$T_{K-1} \mathbf{V}_{K-1} - T_K \mathbf{V}_K = \mathbf{P}_K$$

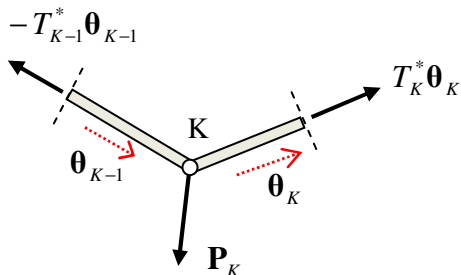
Ținând cont de relația (§ 2.3 - Observație)

$$T\mathbf{V} = T^* \boldsymbol{\theta},$$

unde T^* este forța axială din element, iar $\boldsymbol{\theta}$ versorul direcției elementului orientat, această ecuație se scrie

$$-T_{K-1}^* \boldsymbol{\theta}_{K-1} + T_K^* \boldsymbol{\theta}_K + \mathbf{P}_K = \mathbf{0}$$

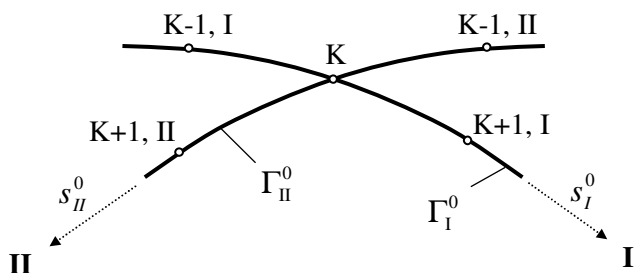
În această formă se recunoaște ecuația obișnuită de echilibru în nodul K – vezi figura de mai jos.



■

6 CAZUL REȚELEI

6.1 Ecuații de mișcare



În cazul în care în nodul K vin cabluri pe două drumuri orientate I, II, ecuațiile de mișcare pentru nodul K , (4-1), vor avea forma

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}^0}{6} [\Delta s_{K-1,I}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,I} + \Delta s_{K-1,II}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,II} + 2(\Delta s_{K-1,I}^0 + \Delta s_{K-1,II}^0 + \Delta s_{K,I}^0 + \Delta s_{K,II}^0) \ddot{\mathbf{U}}_K \\ + \Delta s_{K,I}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,I} + \Delta s_{K,II}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,II}] + m_K \ddot{\mathbf{U}}_K \\ + (T_{K-1,I} \mathbf{V}_{K-1,I} - T_{K,I} \mathbf{V}_{K,I}) + (T_{K-1,II} \mathbf{V}_{K-1,II} - T_{K,II} \mathbf{V}_{K,II}) - \mathbf{P}_K = \mathbf{0} \end{aligned}$$

S-a presupus că densitatea de masă $\bar{\rho}^0$ este aceeași pe drumurile I,II. În ecuațiile de mai sus:

$$\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_{K,I} + \mathbf{P}_{K,II},$$

unde $\mathbf{P}_{K,J}$ este definit în 3.2.

Sau, în general,

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{P}^0}{6} \left[\sum_J \Delta s_{K-1,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K-1,J} + \left(\sum_J 2(\Delta s_{K-1,J}^0 + \Delta s_{K,J}^0) \right) \ddot{\mathbf{U}}_K + \sum_J \Delta s_{K+1,J}^0 \ddot{\mathbf{U}}_{K+1,J} \right] + m_K \ddot{\mathbf{U}}_K \\ & + \sum_J (T_{K-1,J} \mathbf{V}_{K-1,J} - T_{K,J} \mathbf{V}_{K,J}) \\ & - \mathbf{P}_K = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6-1)$$

Sumele se efectuează de la $J = 1$ la $J = \text{Numărul de drumuri incidente în nodul } K$.

6.2 Ecuații de echilibru

Dacă în nodul K vin cabluri pe două drumuri orientate I, II, ecuațiile de echilibru pentru nodul K vor avea forma

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) - \mathbf{P}_K = \mathbf{0},$$

unde:

$$\mathbf{f}_K(\mathbf{U}) = \mathbf{f}_{K,I}(\mathbf{U}) + \mathbf{f}_{K,II}(\mathbf{U}); \quad \mathbf{P}_K = \mathbf{P}_{K,I} + \mathbf{P}_{K,II},$$

iar $\mathbf{f}_{K,J}(\mathbf{U})$, $\mathbf{P}_{K,J}$ sunt date de expresiile pentru cablul pe drumul J .

Ecuațiile (5-3) vor avea forma:

$$\left[-\mathbf{A}_{K-1}^I \mid -\mathbf{A}_{K-1}^{II} \mid \mathbf{A}_{K-1}^I + \mathbf{A}_{K-1}^{II} + \mathbf{A}_K^I + \mathbf{A}_K^{II} \mid -\mathbf{A}_K^I \mid -\mathbf{A}_K^{II} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_{K-1,I} \\ \Delta \mathbf{U}_{K-1,II} \\ \Delta \mathbf{U}_K \\ \Delta \mathbf{U}_{K+1,I} \\ \Delta \mathbf{U}_{K+1,II} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_K - \mathbf{f}_K, \quad (6-2)$$

în care \mathbf{A}_K^J sunt date de expresiile din §5, calculate pentru drumul J .

Această formă se generalizează în mod natural, dacă în nodul K vin cabluri pe mai mult de două drumuri orientate.

Ecuațiile (6-1), scrise pentru $K = 1, 2, \dots, N$ se pun sub forma

$$\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{U} = \mathbf{P} - \mathbf{f}, \quad (6-3)$$

în care:

$$\Delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} - \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 - \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{P}_2 - \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_N - \mathbf{f}_N \end{bmatrix}$$

Matricea \mathbf{A} are forma derivată din cea a ecuației (6-2), ordonând, în (6-2), elementele vectorului $[\Delta \mathbf{U}_{K,J}]$ în ordinea $1, 2, \dots, N$.

Matricea $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{U})$ se zice matricea de rigiditate tangentă – în configurația definită de vectorii $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_K, K = 1, 2, \dots, N\}$.

V. “Deducerea ecuațiilor de mișcare”.

6.3 Calculul reacțiilor

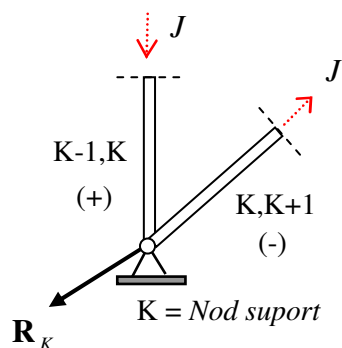
Ecuția de echilibru în nodul suport K , va fi

$$\sum_J (T_{K-1} \mathbf{V}_{K-1} - T_K \mathbf{V}_K) = \mathbf{R}_K$$

unde \mathbf{R}_K este reacțiunea în nodul K . Suma se face în raport cu drumurile J incidente în nodul K . Vezi Figura de mai jos – în care barele $(K-1, K)$ și $(K, K+1)$ alcătuiesc un drum orientat, incident în nodul K .

Sau, explicitând elementele la care se referă T și \mathbf{V} ,

$$\sum_J (T_{K-1,K} \mathbf{V}_{K-1,K} - T_{K,K+1} \mathbf{V}_{K,K+1}) = \mathbf{R}_K$$



Cu aceasta, formula de calcul a reacțiunii se poate scrie:

$$\mathbf{R}_K = \sum_I \pm T_I \mathbf{V}_I$$

unde suma se face în raport cu *elementele I* incidente în nod, iar semnele se aleg, conform orientării elementelor, cum urmează:

+ : pentru elemente care intră în nod (elemente ”în urmă”)

- : pentru elemente care ies din nod (elemente ”înainte”)

Observație

Cu $T\mathbf{V} = T^*\boldsymbol{\theta}$, formula anterioară se poate deduce din ecuația obișnuită de echilibru de nod (v. Observația din 5):

$$\sum_I \mp T_I^* \boldsymbol{\theta}_I + \mathbf{R}_K = \mathbf{0},$$

unde semnele se iau astfel: – dacă bara (orientată) intră în nod, și + dacă bara iese din nod. ■